グラフ理論

2

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ，$N=[G,w]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．節点 u から節点 v への有向枝は (u,v) と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．節点 u から節点 v への距離 $\mathrm{dist}(u,v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める．枝重み和が負である有向閉路を負閉路と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) 次の条件を満たす節点の実数値重み $p(v)$, $v \in V$ が存在するとき，N に負閉路が存在しないことを証明せよ．

$$w(u,v)+p(u)-p(v) \geqq 0, \quad \forall (u,v) \in E.$$

(ii) 次を満たす節点 $s \in V$ と枝 $(u,v) \in E$ の組が存在するとき，N に負閉路が存在することを証明せよ．

$$\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v) < \mathrm{dist}(s,v).$$

(iii) 各枝の重みが非負であると仮定する．ある部分集合 $S \subsetneqq V$ と節点 $s \in S$ に対して，S から $V \setminus S$ へ向かう枝 $(u,v) \in E$ の中で $\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v)$ の値を最小とする枝を (u^*,v^*) とする．このとき，$\mathrm{dist}(s,v^*)=\mathrm{dist}(s,u^*)+w(u^*,v^*)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\mathrm{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N. A directed cycle is called a negative cycle if the sum of edge weights in the cycle is negative. Answer the following questions.

(i) Prove that N has no negative cycle if there is a set of real weights $p(v)$, $v \in V$ such that

$$w(u, v) + p(u) - p(v) \geqq 0, \quad \forall (u, v) \in E.$$

(ii) Prove that N has a negative cycle if there is a pair of a vertex $s \in V$ and an edge $(u, v) \in E$ such that

$$\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v) < \mathrm{dist}(s, v).$$

(iii) Assume that the weight of each edge is non-negative. For a subset $S \subsetneqq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges $(u, v) \in E$ directed from S to $V \setminus S$. Prove that $\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.