現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし，$\mathbb{R}^3$ の二つの線形部分空間を

$$\mathcal{O} = \{x_0 : \text{任意の}\ t\ \text{に対して}\ u(t) = 0\ \text{ならば，任意の}\ t\ \text{に対して}\ y(t) = 0\}$$

および

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}$$

により定義する．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) $\mathcal{O}$ の基底および $\mathcal{C}$ の基底をそれぞれ一つ求めよ．

(ii) 線形独立なベクトルの組 $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ で $e_1 \in \mathcal{O}$ かつ $e_2 \in \mathcal{C}$ を満たすものを一つ求めよ．また，$T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ に対して，$Tz(t) = x(t)$ で与えられる $z(t)$ を状態変数としてもつ座標変換された状態方程式を求めよ．

(iii) $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して，

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt$$

を最小化する $u(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Define two linear subspaces of $\mathbb{R}^3$ by

$$\mathcal{O} = \{x_0 : y(t) = 0 \text{ for all } t \text{ if } u(t) = 0 \text{ for all } t\}$$

and

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Obtain a basis of $\mathcal{O}$ and a basis of $\mathcal{C}$.

(ii) Find a triplet of linearly independent vectors $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ such that $e_1 \in \mathcal{O}$ and $e_2 \in \mathcal{C}$. Then, obtain the coordinate transformed state equation having the state vector $z(t)$ such that $Tz(t) = x(t)$ with $T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(iii) For $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, find $u(t)$ that minimizes

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt.$$