基礎数学 II

$\boxed{6}$

A を零行列 O ではない $n \times n$ 実行列 $(A \neq O)$ とし，$\mathrm{rank}A$ を A のランク（階数）とし，$r = \mathrm{rank}A$ とおく．以下の問いに答えよ．ただし，同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $n - r$ 個の 1 次独立な解 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ をもち，$n - r$ 個を超える数の 1 次独立な解をもたないことは証明なしで使ってよい．

(i) $n \times n$ 実行列 B が $AB = O$ を満たすとする．このとき

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq n$$

を示せ．

(ii) 行列 A に対して，$AB = O$ かつ

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = n$$

なる $n \times n$ 実行列 B が存在することを示せ．

(iii) $n \times n$ 実行列 B に対して

$$\mathrm{rank}(A + B) \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

を示せ．

(iv) $n \times n$ 実行列 B に対して

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq \mathrm{rank}AB + n$$

を示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let A be an $n\times n$ nonzero real matrix ($A \neq O$) and rank$A$ be the rank of A. Let $r = \mathrm{rank}A$. Answer the following questions. Use the fact without proof that the homogeneous linear equations $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ have $n - r$ linearly independent solutions $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ and do not have linearly independent solutions more than $n - r$, if necessary.

(i) Let B be an $n \times n$ real matrix B such that $AB = O$. Show that

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq n.$$

(ii) Show that there is an $n \times n$ real matrix B such that $AB = O$ and

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = n.$$

(iii) Show that

$$\mathrm{rank}(A + B) \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

for any $n \times n$ real matrix B.

(iv) Show that

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq \mathrm{rank}AB + n$$

for any $n \times n$ real matrix B.