オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{llll} \text{(P1)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) & \\ & \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqq 0 & (i = 1, \ldots, m) \\ & & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b & \end{array}$$

ただし，(P1) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$^\top$ は転置記号を表し，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ は微分可能な凸関数，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，$b \in \mathbb{R}$ である．この問題の最適解を $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ とする．また，$\boldsymbol{x}^*$ に対応する不等式制約および等式制約のラグランジュ乗数が存在し，それぞれを $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ および $\mu^* \in \mathbb{R}$ とする．つまり，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mu^*)$ は問題 (P1) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を満たす．ここで，$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$ である．

さらに，正のパラメータ $c \in \mathbb{R}$ を含むつぎの制約なし最適化問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) + c\left(\displaystyle\sum_{i=1}^m \max\{g_i(\boldsymbol{x}), 0\} + |\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b|\right) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

ただし，(P2) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (P1) のカルーシュ・キューン・タッカー条件を書け．

(ii) 微分可能な関数のみを用いて，問題 (P2) と等価な非線形計画問題を書け．

(iii) つぎの条件を満たすとき，$\boldsymbol{x}^*$ は (P2) の最適解であることを示せ．

$$c \geqq \max\left\{\max_{i \in I} \lambda_i^*, |\mu^*|\right\}$$

ただし，$I = \{i \in \{1, \ldots, m\}\colon g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$ である．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Consider the following nonlinear programming problem:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
 & \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \\
 & & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b,
\end{array}
$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, the superscript $^\top$ denotes transposition, the functions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ are differentiable and convex, and $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Let $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ be an optimal solution of (P1). Also, let $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ and $\mu^* \in \mathbb{R}$ be the corresponding Lagrange multipliers associated to the inequality and the equality constraints, respectively, assuming that they exist. More precisely, $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mu^*)$ satisfies the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P1), with $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$.

Moreover, consider the following unconstrained optimization problem that includes a positive parameter $c \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) + c\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(\boldsymbol{x}), 0\} + |\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b|\right) \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,
\end{array}
$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions.

(i) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P1).

(ii) Write out a nonlinear programming problem that is equivalent to (P2), using only differentiable functions.

(iii) Prove that $\boldsymbol{x}^*$ is a solution of (P2) when

$$c \geqq \max\left\{\max_{i \in I} \lambda_i^*, |\mu^*|\right\},$$

where $I = \left\{i \in \{1, \ldots, m\}\colon g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\right\}$.