基礎数学 I

$\boxed{1}$

開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上の関数 $y = \tan x$ の逆関数を $y = \arctan x$ と書く．$f(x) = \arctan x$ は $\mathbb{R}$ 上の実解析的関数である．以下の問いに答えよ．

(i) 自然数 $n \geqq 1$ に対して,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数である.

(ii) $f(x)$ の $x=0$ を中心としたテイラー展開を求めよ.

(iii) (ii) で求めたテイラー展開の収束半径を求めよ.

(iv) 次式を示せ.

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $y = \arctan x$ denote the inverse function of $y = \tan x$ defined on the open interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. The function $f(x) = \arctan x$ is real analytic on $\mathbb{R}$. Answer the following questions.

(i) Show that for any integer $n \geqq 1$,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0,$$

where $f^{(n)}(x)$ is the nth derivative of $f(x)$.

(ii) Obtain the Taylor series for $f(x)$ at $x = 0$.

(iii) Find the convergence radius of the Taylor series obtained in (ii).

(iv) Show that

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとする．$\mathrm{R}(u;G)$ を G において点 u から有向路で到達できる点の集合と定め，$\mathrm{dist}(u,v;G)$ を点 u から点 v へ至る G の有向路の最短の長さとする．$v \notin \mathrm{R}(u;G)$ のときは $\mathrm{dist}(u,v;G) \triangleq |V|$ と定める．有向グラフ G から有向枝 $e \in E$ を削除した有向グラフを $G-e$ と記す．s,t を V の二点とする．G は隣接リストにより貯えられているとする．以下の問いに答えよ．

(i) $t \in \mathrm{R}(s;G)$ と仮定する．点 s から点 t へ至る有向路で最短のものを求める $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(ii) $\mathrm{dist}(s,t;G-e) > \mathrm{dist}(s,t;G)$ を満たす有向枝 $e \in E$ が存在するかどうかを判定する $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(iii) $\mathrm{dist}(s,t;G) = \mathrm{dist}(t,s;G) = 3 < \mathrm{dist}(s,t;G-e) = \mathrm{dist}(t,s;G-e)$ である二点 $s,t \in V$，有向枝 $e \in E$ をもつ有向グラフ $G=(V,E)$ の例を作成せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E. Let $\mathrm{R}(u; G)$ denote the set of vertices reachable from a vertex u by a directed path in G and $\mathrm{dist}(u, v; G)$ denote the shortest length of a path from a vertex u to a vertex v in G, where we set $\mathrm{dist}(u, v; G) \triangleq |V|$ if $v \notin \mathrm{R}(u; G)$. Let $G - e$ denote the directed graph obtained from G by removing a directed edge $e \in E$. Let s and t be two vertices in V. Assume that G is stored in adjacency lists. Answer the following questions.

(i) Assume that $t \in \mathrm{R}(s; G)$. Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that computes a directed path with the shortest length from s to t.

(ii) Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that tests whether there exists a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G - e) > \mathrm{dist}(s, t; G)$.

(iii) Construct an example of a directed graph $G = (V, E)$ that contains two vertices $s, t \in V$ and a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G) = \mathrm{dist}(t, s; G) = 3 < \mathrm{dist}(s, t; G - e) = \mathrm{dist}(t, s; G - e)$.

線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を $m \times n$ 行列とする．さらに $\boldsymbol{A}$ の第 (i,j) 成分を $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ とする．

以下のパラメータ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ とパラメータ $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{u}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{v}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ の決定変数は $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ である．また，$^\top$ は転置記号を表す．

問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ のすべての最適解の集合を $S_\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ とし，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ のすべての最適解の集合を $S_\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ とする．さらに，$X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_\mathrm{P}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_\mathrm{Q}(\boldsymbol{x}^*)\}$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の双対問題を書け．

(ii) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ を $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ であるベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{0} \in S_\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ とする．このとき，すべての $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$ に対して $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^* = 0$ となることを示せ．

(iv) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ を $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるベクトルとする．このとき，$S_\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ を求めよ．

(v) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ とする．このとき，X を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be $m \times n$ matrices. Suppose that the (i, j)th entry of $\boldsymbol{A}$ is given by $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$.

Consider the following linear programming problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ with vectors of parameters $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, respectively.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{u}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{v}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ are $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, respectively. Here the superscript $^\top$ denotes transposition.

Let $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ and $S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{v})$ denote the sets of all optimal solutions of problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$, respectively. Moreover, let $X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{x}^*)\}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$.

(ii) Let $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ be a vector such that $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Show that $\boldsymbol{0} \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(iii) Suppose that $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$. Then show that $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = 0$ for all $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$.

(iv) Let $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ be a vector such that $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ and $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Obtain $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(v) Suppose that $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Obtain X.

線形制御理論

$\boxed{4}$

図 1 はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象，k はフィードバックゲイン，r は参照入力，e は偏差，y は出力である．制御対象 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{cs+1}{s^2+as+b}$$

で与えられるとする．ただし $a > 0, b > 0$ ならびに c は実定数である．以下の問いに答えよ．

(i) フィードバック制御系を安定化するゲイン k の集合を求めよ．

(ii) r を単位階段関数とする．出力 y の定常値が存在するゲイン k の集合を求め，各 k に対する出力定常値を求めよ．

(iii) r を単位階段関数とする．ゲイン k は出力 y の定常値が存在するように選ばれているとする．ある $t_0 > 0$ が存在して，$0 < t < t_0$ において $y(t)$ が y の定常値と異符号になるような定数 c の集合を求めよ．

(iv) ゲイン k はフィードバック制御系が安定になるように選ばれているとする．p を実定数として $r(t) = e^{pt}$ となる参照入力を加えるとき，出力 y が有界となる p の集合を求めよ．

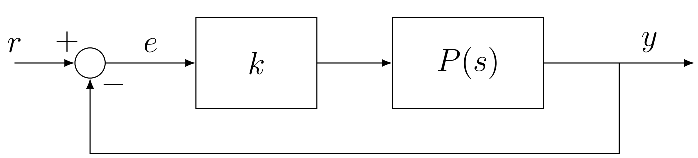

図 1 フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

4

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, k is a feedback gain, r is a reference input, e is an error, and y is an output. The plant $P(s)$ is given by

$$P(s) = \frac{cs+1}{s^2+as+b},$$

where $a > 0$, $b > 0$, and c are real constants. Answer the following questions.

(i) Find the set of the gain k for which the feedback control system is stable.

(ii) Let the reference input r be the unit step signal. Find the set of the gain k for which the steady-state output exists. Moreover, calculate the steady-state output for each k in the set obtained in (ii).

(iii) Let the reference input r be the unit step signal and the gain k be chosen in such a way that the steady-state output exists. Find the set of the constant c for which there exists $t_0 > 0$ such that $y(t)$ and the steady-state output have opposite signs on $0 < t < t_0$.

(iv) Suppose that the gain k is chosen in such a way that the feedback control system is stable. Let the reference input r be written as $r(t) = e^{pt}$, where p is a real constant. Find the set of p for which the output y is bounded.

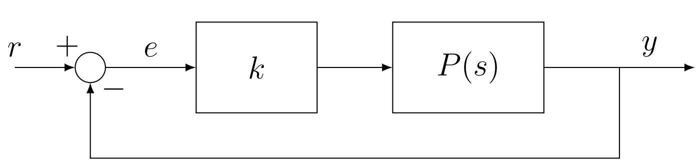

Figure 1 Feedback control system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 M, 半径 R_S の密度一様な球 A の中心から r $(\geqq R_S)$ の距離にある質量 m の質点の運動を考える. 万有引力定数を G とする. 以下の問いに答えよ.

(i) $r \geqq R_S$ のときの球 A によって生じる万有引力のポテンシャルを計算せよ.

(ii) 質点が球 A の表面上から速さ V_E で脱出可能 (無限遠点 $(r = \infty)$ に到達可能) とする. 速さ V_E の最小値を求めよ.

(iii) (ii) の速度 V_E が光の速度 c で与えられるとする. そのときの球 A の半径 R_S を c, M を用いて求めよ.

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

Consider the motion of a particle of mass m at a distance r $(\geqq R_S)$ from the center of a spherical body A with mass M of uniform density and radius R_S. Let Newton's gravitational constant be denoted by G. Answer the following questions.

(i) Compute the gravitational potential at $r \geqq R_S$ affected by the spherical body A.

(ii) Obtain the minimum speed V_E such that the particle can be attained at $r = \infty$, where V_E is a speed at a point of the surface of the spherical body A.

(iii) Consider that V_E obtained in (ii) is equal to the speed of light c. Obtain the radius R_S of the spherical body A in terms of c and M.

基礎数学II

$\boxed{6}$

A を次に定める $n \times n$ 行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また， $p(x)$ を次に定める x の多項式とする．

$$p(x) = \det(xI_n - A)$$

ここで，I_n は n 次単位行列を表す．$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，$n \times n$ 行列 A_k をブロック対角行列

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$0_{\ell,m}$ は $\ell \times m$ 零行列，C_k は 2×2 行列

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を表す．$n \times n$ 行列 A_n を対角行列 $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) 多項式 $p(x)$ を，定数 a と非負整数 r による ax^r の形の項の和によって表わせ．

(ii) $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$ が成り立つことを示せ．

(iii) $|j-k| > 1$ において，$A_k A_j = A_j A_k$ が成り立つことを示せ．

(iv) n を奇数とする．このとき，

$$p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n\, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$$

が成り立つことを示せ．

(v) n を奇数とする．$p(x) = 0$ の根は，$n \times n$ の対称三重対角行列で定まる方程式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0$$

の根と一致することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let A be an $n \times n$ matrix defined as

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and let $p(x)$ be a polynomial in x defined as $p(x) = \det(xI_n - A)$, where I_n is the identity matrix of order n. For $k = 1, 2, \ldots, n-1$, let us define the $n \times n$ matrix A_k by the block diagonal matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix},$$

where $0_{\ell,m}$ is the $\ell \times m$ zero matrix and C_k is the 2×2 matrix

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Define the $n \times n$ matrix A_n by the diagonal matrix $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$.

Answer the following questions.

(i) Express the polynomial $p(x)$ as a sum of terms of the form ax^r, where a is a constant and r is a non-negative integer.

(ii) Show that $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$.

(iii) Show that $A_k A_j = A_j A_k$ for $|j - k| > 1$.

(iv) Let n be an odd integer. Show that $p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n\, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$.

(v) Let n be an odd integer. Show that the roots of $p(x) = 0$ coincide with the roots of the equation

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0,$$

determined by an $n \times n$ symmetric tridiagonal matrix.

応用数学

1

i を虚数単位とする．$f(x)$ を実解析的関数で $f(x+2\pi)=f(x)$ を満たし，

$$D_\xi = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

を含む開集合まで解析接続できるとする．ここで，ξ は正の定数である．このとき，$f(x)$ はフーリエ級数展開可能で

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

が成り立つ．以下の問いに答えよ．

(i) 複素平面上の点 $0, 2\pi, 2\pi+i\xi, i\xi$ をこの順で結んでできる長方形の経路に沿った周回積分を考えることにより，任意の整数 k に対し，

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+i\xi)e^{-ikx}dx$$

を示せ．また，

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-i\xi)e^{-ikx}dx$$

を示せ．

(ii) $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$ とする．任意の整数 k に対し，$a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$ を示せ．

(iii) $c > 1$ を定数とし，

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}$$

とする．任意の正の実数 $\eta < \log(c+\sqrt{c^2-1})$ に対し，ある $M > 0$ が存在し，すべての整数 k に対し $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let i denote the imaginary unit. Let $f(x)$ be a real analytic function satisfying $f(x+2\pi) = f(x)$ and having an analytic continuation on an open set including

$$D_\xi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

where $\xi > 0$ is a constant. Then the Fourier series of $f(x)$ converges to $f(x)$ and

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Answer the following questions.

(i) Considering the contour integration along the rectangular path connecting the points $0, 2\pi, 2\pi + i\xi$ and $i\xi$ in this order on the complex plane, show that for any integer k,

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i\xi) e^{-ikx} dx.$$

Moreover show that

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - i\xi) e^{-ikx} dx.$$

(ii) Let $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$. Show that for any integer k, $a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$.

(iii) Let $c > 1$ be a constant and let

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}.$$

Show that for any positive real number $\eta < \log(c + \sqrt{c^2 - 1})$, there is a constant $M > 0$ such that for all integer k, $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ holds.

グラフ理論

$\boxed{2}$

G を点集合 V，枝集合 E から成る単純連結無向グラフとし，各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が付与されている．点の部分集合 $X \subseteqq V$ に対し X と $V \setminus X$ の間の枝の集合を $E(X)$ と記す．枝の部分集合 $S \subseteqq E$ に対して $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$，$w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$ と定める．以下の問いに答えよ．

(i) $(X, F), X \neq V$ を G の部分木とし，G の最小木には木 (X, F) を含むものが存在すると仮定する．$a_F = uv \in E(X)$ を $E(X)$ の中で重み最小の枝とする．このとき G の最小木には $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$ を含むものが存在することを証明せよ．

(ii) 最小木を求めるプリム法を記述し，その正当性を証明せよ．

(iii) (V, T^*) を G の最小木とする．このとき G の任意の全域木 (V, T) に対して $w_{\max}(T^*) \leqq w_{\max}(T)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let G be a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a subset $X \subsetneqq V$ of vertices, let $E(X)$ denote the set of edges between X and $V \setminus X$. For a subset $S \subsetneqq E$ of edges, define $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$ and $w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$. Answer the following questions.

(i) Let $(X, F), X \neq V$ be a subtree of G and assume that one of the minimum spanning trees of G contains the tree (X, F). Let $a_F = uv \in E(X)$ be an edge with the minimum weight among the edges in $E(X)$. Prove that one of the minimum spanning trees of G contains $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$.

(ii) Describe Prim's method for computing a minimum spanning tree and prove its correctness.

(iii) Let (V, T^*) be a minimum spanning tree of G. Prove that $w_{\max}(T^*) \leqq w_{\max}(T)$ holds for every spanning tree (V, T) of G.

オペレーションズ・リサーチ

3

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．パラメータ $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ をもつ次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{x}): & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}^i)^\top \boldsymbol{z}^i + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \end{array}$$

ここで，$\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の決定変数は $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$（$i = 1, \ldots, n$）である．また，$^\top$ は転置記号を表す．さらに，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の最適値が定義されているとし，その最適値を $f(\boldsymbol{x})$ と表す．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(ii) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の目的関数が，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$（$i = 1, \ldots, n$）に対して凸であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{C}$ を正定値対称行列と仮定し，次の最適化問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P1}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を問題 P1 の大域的最適解とするとき，以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq \frac{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})}$$

ただし，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}$ の最小固有値を表す．

(iv) $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 零行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元零ベクトルと仮定する．以下の最適化問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P2}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq \alpha \end{array}$$

ここで，$\alpha \in \mathbb{R}$ は正の定数である．$(\hat{\boldsymbol{x}}, \rho), (\bar{\boldsymbol{x}}, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ が共に問題 P2 のカルーシュ・キューン・タッカー条件を満たすとき，$f(\hat{\boldsymbol{x}}) = f(\bar{\boldsymbol{x}})$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

3

Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Consider the following nonlinear programming problem with parameter $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{x}): & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}^i)^\top \boldsymbol{z}^i + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, \end{array}$$

where the decision variables are $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$, with $^\top$ denoting transposition. Moreover, denote by $f(\boldsymbol{x})$ the optimal value of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$, assuming that it is well-defined for all $\boldsymbol{x}$.

Answer the following questions.

(i) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$.

(ii) Prove that the objective function of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ is convex with respect to $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(iii) Assume that $\boldsymbol{C}$ is symmetric positive definite and consider the following optimization problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P1}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Show that the following inequality holds when $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ is a global optimal solution of problem P1:

$$(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq \frac{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})},$$

where $\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$ denotes the smallest eigenvalue of $\boldsymbol{C}$.

(iv) Assume that $\boldsymbol{A}$ is the $m \times n$ zero matrix and $\boldsymbol{b}$ is the m-dimensional zero vector. Consider the following optimization problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P2}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq \alpha, \end{array}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ is a positive constant. Show that $f(\hat{\boldsymbol{x}}) = f(\bar{\boldsymbol{x}})$ holds, when both $(\hat{\boldsymbol{x}}, \rho), (\bar{\boldsymbol{x}}, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfy the Karush-Kuhn-Tucker conditions of problem P2.

現代制御論

$\boxed{4}$

線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

で記述されるシステムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

を導入する．ただし，行列 A の転置行列を $A^\top$，ベクトル x の転置ベクトルとノルムをそれぞれ $x^\top$，$\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $ab \neq 0$ を満たす $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，システムが不可制御となる (a,b) に対して，(1) の正定解 P の個数を求めよ．

(ii) $B = 0$ とし，ある正定行列 P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ であることを示せ．

(iii) ある P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 および $\tau > 0$ に対して

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(iv) $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$ とするとき，λ が H の固有値ならば $-\lambda$ も H の固有値であることを示せ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

A linear system is described by the state equation

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. A matrix algebraic equation

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

with respect to a symmetric matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is introduced. The transpose of a matrix A is denoted by $A^\top$. The transpose and the norm of a vector x are denoted by and $x^\top$ and $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$, respectively. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ with $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ such that $ab \neq 0$. Then, find the number of positive definite solution P to (1) for (a, b) which makes this system uncontrollable.

(ii) Suppose that $B = 0$ and that a positive defnite matrix P satisfies (1). Prove $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ holds for any x_0.

(iii) Suppose that P is a solution to (1). Prove that

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

holds for any x_0 and $\tau > 0$.

(iv) Define $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$. Prove that for any eigenvalue λ of H, $-\lambda$ is also an eigenvalue of H.

物理統計学

$\boxed{5}$

エネルギーレベルが

$$E_n = h\nu\left(\frac{1}{2}+n\right) \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

なる振動数 $\nu(>0)$ の振動子系を考える．ここで $h(>0)$ は定数であり, エネルギーレベルの縮退は無く, 同系の分配関数 Z は

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

で与えられるとする．ただし, $k>0$ をボルツマン定数, T を絶対温度とする．以下の問いに答えよ.

(i) 分配関数 Z を計算せよ.

(ii) エネルギー E の期待値 $\langle E\rangle$ を求めよ.

(iii) 比熱 $C=\dfrac{d\langle E\rangle}{dT}$ を求めよ.

(iv) 比熱 C の低温極限 $(T\to 0)$ を求めよ.

(v) 比熱 C の高温極限 $(T\to\infty)$ を求めよ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Consider an oscillator system of a frequency ν with the energy levels

$$E_n = h\nu \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

where $h(> 0)$ is a constant and no energy level is degenerate. The distribution function Z of the system with the absolute temperature T is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT} \right),$$

where $k(> 0)$ is the Boltzmann constant. Answer the following questions.

(i) Compute the distribution function Z.

(ii) Obtain the average energy $\langle E \rangle$.

(iii) Obtain the specific heat $C = \dfrac{d\langle E \rangle}{dT}$.

(iv) Obtain the specific heat C in the low temperature limit ($T \to 0$).

(v) Obtain the specific heat C in the high temperature limit ($T \to \infty$).

力学系数学

$\boxed{6}$

$a(t), b(t)$ を t のある有理式として次の実微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．

(i) $k \geqq 1$ をある整数として，$x = t^k$ が式 (1) の解であるための $a(t), b(t)$ に関する必要十分条件を求めよ．

以下では，ある整数 $k \geqq 1$ に対して (i) で求めた条件が成り立つものとし，$\phi(t)$ を t^k と線形独立な解として，

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t)$$

とおく．

(ii) $a(t), b(t)$ を $p(t)$ を用いて表わせ．

(iii) $p(t) = t$ のとき $a(t), b(t)$ を定めよ．

(iv) 式 (1) のすべての解が定数でない多項式のとき，$a(t), b(t)$ は多項式でないことを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ and $b(t)$ be rational functions of t. Consider the real ordinary differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{1}$$

Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition on $a(t)$ and $b(t)$ for $x = t^k$ to be a solution to Eq. (1) for each integer $k \geqq 1$.

In the following, assume that the condition obtained in (i) holds for an integer $k \geqq 1$, and let

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t),$$

where $\phi(t)$ is a solution which is linearly independent of t^k.

(ii) Write down $a(t)$ and $b(t)$ in terms of $p(t)$.

(iii) Determine $a(t)$ and $b(t)$ when $p(t) = t$.

(iv) Show that $a(t)$ and $b(t)$ are not polynomials if all solutions to Eq. (1) are nonconstant polynomials.