基礎数学 I

$\boxed{1}$

開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上の関数 $y = \tan x$ の逆関数を $y = \arctan x$ と書く． $f(x) = \arctan x$ は $\mathbb{R}$ 上の実解析的関数である．以下の問いに答えよ．

(i) 自然数 $n \geqq 1$ に対して，

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数である．

(ii) $f(x)$ の $x = 0$ を中心としたテイラー展開を求めよ．

(iii) (ii) で求めたテイラー展開の収束半径を求めよ．

(iv) 次式を示せ．

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $y = \arctan x$ denote the inverse function of $y = \tan x$ defined on the open interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. The function $f(x) = \arctan x$ is real analytic on $\mathbb{R}$. Answer the following questions.

(i) Show that for any integer $n \geqq 1$,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0,$$

where $f^{(n)}(x)$ is the nth derivative of $f(x)$.

(ii) Obtain the Taylor series for $f(x)$ at $x = 0$.

(iii) Find the convergence radius of the Taylor series obtained in (ii).

(iv) Show that

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$