現代制御論

$\boxed{4}$

線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

で記述されるシステムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

を導入する．ただし，行列 A の転置行列を $A^\top$，ベクトル x の転置ベクトルとノルムをそれぞれ $x^\top$，$\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $ab \neq 0$ を満たす $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，システムが不可制御となる (a, b) に対して，(1) の正定解 P の個数を求めよ．

(ii) $B = 0$ とし，ある正定行列 P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 に対して $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ であることを示せ．

(iii) ある P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 および $\tau > 0$ に対して

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(iv) $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$ とするとき，λ が H の固有値ならば $-\lambda$ も H の固有値であることを示せ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

A linear system is described by the state equation

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. A matrix algebraic equation

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

with respect to a symmetric matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is introduced. The transpose of a matrix A is denoted by $A^\top$. The transpose and the norm of a vector x are denoted by and $x^\top$ and $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$, respectively. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ with $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ such that $ab \neq 0$. Then, find the number of positive definite solution P to (1) for (a, b) which makes this system uncontrollable.

(ii) Suppose that $B = 0$ and that a positive defnite matrix P satisfies (1). Prove $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ holds for any x_0.

(iii) Suppose that P is a solution to (1). Prove that

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

holds for any x_0 and $\tau > 0$.

(iv) Define $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$. Prove that for any eigenvalue λ of H, $-\lambda$ is also an eigenvalue of H.