物理統計学

$\boxed{5}$

エネルギーレベルが

$$E_n = h\nu\left(\frac{1}{2}+n\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

なる振動数 $\nu(>0)$ の振動子系を考える．ここで $h(>0)$ は定数であり, エネルギーレベルの縮退は無く, 同系の分配関数 Z は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

で与えられるとする．ただし, $k>0$ をボルツマン定数, T を絶対温度とする．以下の問いに答えよ.

(i) 分配関数 Z を計算せよ.

(ii) エネルギー E の期待値 $\langle E\rangle$ を求めよ.

(iii) 比熱 $C = \dfrac{d\langle E\rangle}{dT}$ を求めよ.

(iv) 比熱 C の低温極限 $(T \to 0)$ を求めよ.

(v) 比熱 C の高温極限 $(T \to \infty)$ を求めよ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Consider an oscillator system of a frequency ν with the energy levels

$$E_n = h\nu\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

where $h(> 0)$ is a constant and no energy level is degenerate. The distribution function Z of the system with the absolute temperature T is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right),$$

where $k(> 0)$ is the Boltzmann constant. Answer the following questions.

(i) Compute the distribution function Z.

(ii) Obtain the average energy $\langle E\rangle$.

(iii) Obtain the specific heat $C = \dfrac{d\langle E\rangle}{dT}$.

(iv) Obtain the specific heat C in the low temperature limit ($T \to 0$).

(v) Obtain the specific heat C in the high temperature limit ($T \to \infty$).