基礎数学 II

$\boxed{6}$

n 次ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ および n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，実数 $||\boldsymbol{x}||_\infty$ および $||A||_\infty$ をそれぞれ $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$ および $||A||_\infty = \max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{||A\boldsymbol{x}||_\infty}{||\boldsymbol{x}||_\infty}$ と定義する．ここで，記号 $^{\mathrm{T}}$ は転置を表す．また，行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とするとき，$\rho(A) = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i|$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\rho(A) \leqq ||A||_\infty$ が成り立つことを示せ．

(ii) $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = O$ が成り立つためには，$\rho(A) < 1$ であることが必要十分であることを示せ．

(iv) $||A||_\infty < 1$ ならば $I - A$ は正則で

$$(I - A)^{-1} = I + \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} A^i$$

が成り立つことを示せ．ここで，I は単位行列を表わす．任意の n 次ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ および n 次正方行列 A, B に対して，

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_\infty \leqq ||\boldsymbol{x}||_\infty + ||\boldsymbol{y}||_\infty, \qquad ||A + B||_\infty \leqq ||A||_\infty + ||B||_\infty$$

が成立することを用いてよい．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $||\boldsymbol{x}||_\infty$ and $||A||_\infty$ be real values defined by

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|, \qquad ||A||_\infty = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_\infty}{||\boldsymbol{x}||_\infty}$$

for an n-dimensional vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ and an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$, respectively. Here we denote the transposition by $^{\mathrm{T}}$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the eigenvalues of the matrix A. Define $\rho(A) = \max_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i|$. Answer the following questions.

(i) Prove that $\rho(A) \leqq ||A||_\infty$.

(ii) Prove that $||A||_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(iii) Prove that $\lim_{k \to \infty} A^k = O$, if and only if $\rho(A) < 1$.

(iv) Prove that, if $||A||_\infty < 1$, then $I - A$ is regular and

$$(I - A)^{-1} = I + \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} A^i$$

holds, where I is the identity matrix. The facts that $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_\infty \leqq ||\boldsymbol{x}||_\infty + ||\boldsymbol{y}||_\infty$ and $||A + B||_\infty \leqq ||A||_\infty + ||B||_\infty$ hold for any n-dimensional vectors $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ and $n \times n$ matrices A, B can be used without proof.