応用数学

1

2 変数関数 $\phi(u,\theta)$ に対する積分変換 $\mathcal{F}_u$ および 2 変数関数 $\psi(x,y)$ に対する積分変換 $\mathcal{G}_{x,y}$ をそれぞれ

$$\mathcal{F}_u[\phi](r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u,\theta)e^{-iur}du,$$
$$\mathcal{G}_{x,y}[\psi](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y)e^{-i(x\xi+y\eta)}dxdy$$

によって定める．以下では，

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}_{x,y}[f](\xi,\eta)e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi\, d\eta \qquad (1)$$

をみたす 2 変数実関数 $f(x,y)$ について考える．このとき，

$$R_f(u,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)dv$$

とする．以下の問いに答えよ．

(i) 式 (1) を，極座標変換 (r,θ), $\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta \ (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて表せ．

(ii) $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) = \sqrt{2\pi}\mathcal{G}_{x,y}[f](r\cos\theta, r\sin\theta)$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta+\pi) = \mathcal{F}_u[R_f](-r,\theta)$ が成り立つことを示せ．

(iv) 次式が成り立つことを示せ．

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta)e^{ir(x\cos\theta+y\sin\theta)}|r|dr\right)d\theta$$

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let $\mathcal{F}_u$ be the integral transformation for a bivariate function $\phi(u,\theta)$, defined by

$$\mathcal{F}_u[\phi](r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u,\theta) e^{-iur} du,$$

and $\mathcal{G}_{x,y}$ be the one for a bivariate function $\psi(x,y)$, defined by

$$\mathcal{G}_{x,y}[\psi](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y) e^{-i(x\xi+y\eta)} dx dy.$$

Consider the bivariate real-valued function $f(x,y)$ such that

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{x,y}[f](\xi,\eta) e^{i(x\xi+y\eta)} d\xi\, d\eta. \tag{1}$$

Set

$$R_f(u,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) dv.$$

Answer the following questions.

(i) Rewrite eq.(1) using the polar coordinates

$$\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta\ (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi).$$

(ii) Prove that $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) = \sqrt{2\pi}\mathcal{G}_{x,y}[f](r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(iii) Prove that $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta+\pi) = \mathcal{F}_u[R_f](-r,\theta)$.

(iv) Prove that $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) e^{ir(x\cos\theta + y\sin\theta)} |r| dr \right) d\theta$.