基礎力学

5

質量 m の粒子が力 $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$ を受けて運動している．ここで，$\boldsymbol{r}$ は粒子の原点からの位置ベクトル，$r := |\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さであり，$g(r)$ は $r > 0$ で微分可能な関数である．粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する．$\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ は粒子の運動量とし，$\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は粒子の原点に関する角運度量とする．ここで，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のベクトル積（外積）である．以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{F}$ は保存力であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{L}$ が保存されることを証明せよ．

(iii) 粒子は $\boldsymbol{L}$ に垂直で原点を含む平面内を運動する事を説明せよ．

(iv) $f(r)$ が $r > 0$ で微分可能な関数としたとき，任意の初期条件に対して $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$ が保存される場合の $f(r)$ と $g(r)$ を求めよ．任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対して $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いてよい．ここで，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のスカラー積（内積）である．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving under the action of a force $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{r}$ denotes the position vector of the particle from the origin, $r := |\boldsymbol{r}|$ stands for the length of $\boldsymbol{r}$ and $g(r)$ is a differentiable function for $r > 0$. It is assumed that the particle is never at the origin. Let $\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ be the momentum of the particle, and $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ be the angular momentum of the particle about the origin, where $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ denotes the vector or cross product of $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$. Answer the following questions.

(i) Show that $\boldsymbol{F}$ is a conservative force.

(ii) Prove that $\boldsymbol{L}$ is conserved.

(iii) Explain that the particle is moving within the plane which is perpendicular to $\boldsymbol{L}$ and includes the origin.

(iv) Obtain $f(r)$ and $g(r)$ such that $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$, where $f(r)$ is a differentiable function for $r > 0$, is conserved for arbitrary initial conditions, with the use of $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$, where $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ stands for the scalar or dot product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{c}$.