応用数学

1

関数 $f(z)$ は，$R>0$ をある定数とし，領域 $0<|z|<R$ において正則で，$0<r<R$，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^n}dz=\frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

が成り立つものとする．ただし，$\alpha\in\mathbb{C}$ は定数で，$\langle\alpha\rangle_n$ は

$$\langle\alpha\rangle_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n>0)\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n<0)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

で定義される．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $f(z)$ は $|z|<R$ において正則でないことを示せ．

(ii) $0<|z|<R$ における $f(z)$ のローラン展開を求めよ．

(iii) N をある自然数として $z=0$ が $f(z)$ の N 位の極であるものとする．このとき，α を N で表せ．また，任意の自然数 n に対して，関数

$$g(z)=\begin{cases}z^N f(z) & (0<|z|<R)\\ \lim\limits_{z\to 0} z^N f(z) & (z=0)\end{cases}$$

の n 階微分係数 $\dfrac{d^n g}{dz^n}(0)$ を求めよ．

(iv) $z=0$ が $f(z)$ の真性特異点となるための，α の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

For a constant $R > 0$, let $f(z)$ be a function which is holomorphic in the region $0 < |z| < R$ and satisfies

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^n} dz = \frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

for $0 < r < R$ and any $n \in \mathbb{Z}$, where $\alpha \in \mathbb{C}$ is a constant and $\langle\alpha\rangle_n$ is defined by

$$\langle\alpha\rangle_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n > 0) \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n < 0) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

Answer the following questions.

(i) Show that $f(z)$ is not holomorphic in $|z| < R$.

(ii) Obtain the Laurent series of $f(z)$ in $0 < |z| < R$.

(iii) Assume that $z = 0$ is an Nth-order pole of $f(z)$ for a positive integer N. Express α by using N. Moreover, let

$$g(z) = \begin{cases} z^N f(z) & (0 < |z| < R) \\ \lim_{z \to 0} z^N f(z) & (z = 0). \end{cases}$$

Obtain the nth-order differential coefficient $\frac{d^n g}{dz^n}(0)$ for any positive integer n.

(iv) Find a necessary and sufficient condition on α for $z = 0$ to be an essential singularity of $f(z)$.