オペレーションズ・リサーチ

3

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続的微分可能な凸関数とし，$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル，b はスカラーであり，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

次の凸計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S
\end{array}
$$

さらにパラメータ $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ を含む次の凸2次計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{y} \in S
\end{array}
$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{y}$ である．任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{z} \in S$ とする．問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x} \in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x} \in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ であるとき，

$$
\nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) < 0, \quad \boldsymbol{a}^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = 0
$$

であることを示せ．

(iv) $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解でないことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable convex function, and let $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$, where $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector.

Consider the following convex programming problem:

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S. \end{array}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem with a vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ of parameters:

$$\text{P}(\boldsymbol{z}): \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} \in S, \end{array}$$

where $\boldsymbol{y}$ is the vector of decision variables. For each $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, problem $\text{P}(\boldsymbol{z})$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$.

Answer the following questions.

(i) Let $\boldsymbol{z} \in S$. Obtain $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem $\text{P}(\boldsymbol{z})$.

(ii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is an optimal solution to problem (P).

(iii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top (\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) < 0, \quad \boldsymbol{a}^\top (\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = 0.$$

(iv) Suppose that $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is not an optimal solution to problem (P).