物理統計学

$\boxed{5}$

粒子の速度 $v(t)$ は, 次のランジュバン方程式に従うものとする.

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t)$$

ここで, m と ζ は正の定数であり, それぞれ質量と摩擦係数を表す. $\eta(t)$ は白色雑音で, $\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$ を満足する. $\langle A \rangle$ は A の平均を表し, ϵ は正の定数, $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数とする. また $t \to \infty$ でエネルギー等分配則が成り立つ, すなわち, k_B をボルツマン定数, T を温度とする時, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}m\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ とする. 以下の問いに答えよ.

(i) $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$ を示せ. 但し, $\gamma = \frac{\zeta}{m}$ とおいた.

(ii) ゆらぎ $\langle v^2(t) \rangle$ を求めよ.

(iii) $t \to \infty$ の極限で, 揺動散逸定理

$$\epsilon = k_B T \zeta$$

が成立することを示せ.

(iv) 速度の相関 $\langle v(t)v(s) \rangle$ を求めよ.

(v) 位置変数 $x(t)$ は, $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$ を満足する変数とする. その時,

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{\langle \{x(t)-x(0)\}^2 \rangle}{2t}$$

によって定義される拡散係数 D に関して

$$D = \frac{1}{\zeta}k_B T$$

が成立することを示せ.

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let the velocity $v(t)$ of a particle obey the following Langevin equation,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t),$$

where m is a positive constant (corresponding to the mass), ζ is a positive constant (corresponding to the friction coefficient), and $\eta(t)$ is the white noise, which satisfies the relations $\langle\eta(t)\rangle = 0$ and $\langle\eta(t)\eta(s)\rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$. Here, $\langle A\rangle$ denotes the average of A, ϵ a positive constant and $\delta(t)$ the Dirac delta function. Assume that the energy equipartition law $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}m\langle v^2(t)\rangle = \frac{1}{2}k_BT$ holds, where k_B is the Boltzmann constant and T is a temperature. Answer the following questions.

(i) Show that $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$, where $\gamma = \frac{\zeta}{m}$.

(ii) Compute the fluctuation $\langle v^2(t)\rangle$.

(iii) Show that the fluctuation-dissipation theorem

$$\epsilon = k_BT\zeta$$

holds in the limit $t \to \infty$.

(iv) Compute the velocity correlation $\langle v(t)v(s)\rangle$.

(v) Let $x(t)$ be the position value which satisfies the relation $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$. Show that the diffusion coefficient D defined by the following equation

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{\langle\{x(t)-x(0)\}^2\rangle}{2t}$$

satisfies the relation

$$D = \frac{1}{\zeta}k_BT.$$