力学系数学

6

$a(t)$ を半無限区間 $[1,\infty)$ で定義された連続関数として，微分方程式

$$t\frac{d^2x}{dt^2}+(t^2-1)a(t)\frac{dx}{dt}-ta(t)x=0, \qquad t \geqq 1 \tag{1}$$

を考える．$x=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ を式 (1) のひとつの解とする．以下の問いに答えよ．

(i) 関数 $a(t)$ を求めよ．

(ii) 式 (1) で $x=\dfrac{t^3}{t^2+1}y$ とおく．y が満たす微分方程式を求めよ．

(iii) (ii) で得られた微分方程式を解き，式 (1) の一般解を求めよ．

(iv) 式 (1) の解 $x(t)$ が半無限区間 $[1,\infty)$ において有界となるための，$t=1$ における初期値 $(x_0,v_0)=\left(x(1),\dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ be a continuous function defined on the semi-infinite interval $[1, \infty)$, and consider the differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (t^2 - 1)a(t)\frac{dx}{dt} - ta(t)x = 0, \qquad t \geqq 1. \tag{1}$$

Assume that $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$ is a solution of Eq. (1). Answer the following questions.

(i) Determine the function $a(t)$.

(ii) Let $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}y$ in Eq. (1). Derive a differential equation which y has to satisfy.

(iii) Solve the differential equation derived in (ii), and obtain the general solution of Eq. (1).

(iv) Let $x(t)$ be a solution of Eq. (1). Find a necessary and sufficient condition on the initial values $(x_0, v_0) = \left(x(1), \dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ at $t = 1$ for $x(t)$ to be bounded on the semi-infinite interval $[1, \infty)$.