基礎数学 II

$\boxed{6}$

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 実対称行列とし，任意の非零な n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ とその転置 $\boldsymbol{x}^\top$ によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$ は正であるとする．以下の問いに答えよ．

(i) 行列 A の対角成分 a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ は全て正であることを示せ．

(ii) 行列 A の固有値 λ_i $(i = 1, \dots, n)$ は全て正であることを示せ．

(iii) 行列 A は正則であることを示せ．

(iv) $n \geqq 3$ のとき行列 A の第 i_1, i_2, …, i_r 行，第 i_1, i_2, …, i_r 列 $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$ を取り出して作った $r \times r$ $(1 < r < n)$ 行列 A_r について考える．例えば，$r = 2$ のとき

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

である．任意の非零な r 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}_r$ によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}_r^\top A_r \boldsymbol{x}_r$ は正であることを示せ．

(v) 任意の $n \times n$ $(n \geqq 2)$ 実行列 B に対して $B^\top B$ は実対称行列となる．$B^\top B = (b_{ij})$ とおき，対角成分 b_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ は全て正であると仮定する．そのような B に対して，任意の非零な n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ について 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top B^\top B\boldsymbol{x}$ は正となるか，理由をつけて答えよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ real symmetric matrix. Let the quadratic form $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ be positive, where $\boldsymbol{x}$ is any nonzero n-dimensional vector and $\boldsymbol{x}^\top$ is the transpose of $\boldsymbol{x}$. Answer the following questions.

(i) Show that the diagonal elements a_{ii} of the matrix A are all positive.

(ii) Show that the eigenvalues λ_i of the matrix A are all positive.

(iii) Show that the matrix A is nonsingular.

(iv) Let $n \geqq 3$. Let A_r be a $r \times r$ $(1 < r < n)$ real symmetric matrix defined by extracting the i_1th, i_2th, $\ldots$, i_rth rows and the i_1th, i_2th, $\ldots$, i_rth columns $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$ from the $n \times n$ matrix A. For example,

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

for $r = 2$. Show that the quadratic form $\boldsymbol{x}_r^\top A_r \boldsymbol{x}_r$ is positive for any nonzero r-dimensional vector $\boldsymbol{x}_r$.

(v) The matrix $B^\top B = (b_{ij})$ is real symmetric for any $n \times n$ $(n \geqq 2)$ real matrix B. Suppose that the diagonal elements b_{ii} of $B^\top B$ are all positive. Is the quadratic form $\boldsymbol{x}^\top B^\top B \boldsymbol{x}$ positive for such B and for any nonzero n-dimensional vector $\boldsymbol{x}$? Give a reason for the answer.