応用数学

1

n と $a > 0$ を，それぞれ，自然数と実数とし，次式を満たす無限区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された C^n 級関数 $f(x)$ を考える．

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x|^a f(x) = 1$$

$k \leqq n$ を自然数とする．$f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

とし，$\hat{f}_0(\xi)$ を $f(x)$ のフーリエ変換とする．また，任意の自然数 $j \leqq n$ に対して極限 $\lim_{x \to \pm\infty} |x|^{a+j} f^{(j)}(x)$ が存在するものとする．以下の問いに答えよ．

(i) $f(x)$ が無限区間 $(-\infty, \infty)$ において可積分である，すなわち，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

が存在するための必要十分条件が $a > 1$ であることを示せ．

(ii) $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} |x|^{a+k} |f^{(k)}(x)| = \prod_{j=0}^{k-1} (a + j)$ となることを示せ．

(iii) $a > 1$ のとき，$f^{(k)}(x)$ が無限区間 $(-\infty, \infty)$ において可積分となることを示せ．

(iv) $a > 1$ のとき，$\hat{f}_k(\xi)$ を $\hat{f}_0(\xi)$ を用いて表わせ．

(v) 自然数 ℓ に対して $a > \ell + 1$ であるとき，$\hat{f}_k(\xi)$ は $C^{k+\ell}$ 級であることを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let n and $a > 0$ be a positive integer and a real number, respectively, and consider a C^n function $f(x)$ defined on the infinite interval $(-\infty, \infty)$ and satisfying

$$\lim_{|x| \to \pm\infty} |x|^a f(x) = 1.$$

Let $k \leqq n$ be a positive integer. Write the Fourier transform for the kth-order derivative $f^{(k)}(x)$ of $f(x)$ as

$$\hat{f}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

and let $\hat{f}_0(\xi)$ denote the Fourier transform of $f(x)$. Moreover, suppose that $\lim_{x \to \pm\infty} |x|^{a+j} f^{(j)}(x)$ exists for any positive integer $j \leqq n$. Answer the following questions.

(i) Show that a necessary and sufficient condition for $f(x)$ to be integrable on the infinite interval $(-\infty, \infty)$, that is, for the improper integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

to exist is $a > 1$.

(ii) Show that $\lim_{x \to \pm\infty} |x|^{a+k} |f^{(k)}(x)| = \prod_{j=0}^{k-1} (a+j)$.

(iii) Show that $f^{(k)}(x)$ is integrable on the infinite interval $(-\infty, \infty)$ when $a > 1$.

(iv) Express $\hat{f}_k(\xi)$ in terms of $\hat{f}_0(\xi)$ when $a > 1$.

(v) Show that $\hat{f}_k(\xi)$ is of class $C^{k+\ell}$ when $a > \ell + 1$ for a positive integer ℓ.