京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成29年度4月期入学 / 平成28年度10月期入学)

Admissions for April 2017 / October 2016
Entrance Examination for Master's Program
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成28年8月8日(月) 15:30 – 17:30
August 8, 2016, 15:30 – 17:30

基礎科目
Basic Subjects

選択科目（Choice of Subjects）：
基礎数学I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学II
Basic Mathematics I, Data Structures and Algorithms, Linear Programming, Linear Control Theory, Basic Mechanics, Basic Mathematics II

注意 (NOTES)

1. 上記科目から２科目選択すること。
   ３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

基礎数学 I

$\boxed{1}$

$a > 0$ を実数として，半無限区間 $[0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(x) = e^x - ax^2$ を考える．$f(x)$ が狭義単調増加であるとき，以下の問いに答えよ．

(i) $f(x)$ は狭義単調増加である．定数 a が取り得る値の範囲を求めよ．

(ii) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(y)$ とする．定積分 $F(a) = \displaystyle\int_1^{f(a)} f^{-1}(y)dy$ の値を求めよ．

(iii) b を実数として，$F(a) = b$ を満たす定数 a が (i) で求めた範囲にただ一つ存在するものとする．ただし，$F(a)$ は (ii) で求めたものである．定数 b の値の範囲を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $a > 0$ be a real number. Consider a function $f(x) = e^x - ax^2$ defined on the semi-infinite interval $[0, \infty)$. Assume that $f(x)$ is strictly increasing. Answer the following questions.

(i) Obtain the range of values of the constant a such that $f(x)$ is strictly increasing.

(ii) Let $f^{-1}(y)$ be the inverse function of the function $y = f(x)$. Obtain the value of the definite integral $F(a) = \int_1^{f(a)} f^{-1}(y)dy$.

(iii) Let b be a real number. Assume that in the range obtained in (i) there exists a unique value of a satisfying $F(a) = b$. Here $F(a)$ is obtained in (ii). Obtain the range of values of the constant b.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$k \geqq 2$ 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ があり，各配列 A_i に $n_i \geqq 1$ 個の整数が小さい順に貯えられている．ここで，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ とし，k 個の配列全体の中で貯えられている n 個の整数は全て異なるとする．以下の問いに答えよ．

(i) 配列 A_1, A_2 内の $n_1 + n_2$ 個の整数を $O(n_1 + n_2)$ 時間で小さい順に整列できることを示せ．

(ii) k 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 内の n 個の整数を $O(n \log k)$ 時間で小さい順に整列できることを示せ．

(iii) k 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 内の n 個の整数の中で小さいものから k 個の整数を $O(k \log k)$ 時間で選び出せることを示せ．

(iv) いま，$n_1 = 1$ および 各 $i = 2, 3, \ldots, k$ に対し $n_i = 2n_{i-1}$ が成り立っているとする．このとき，k 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 内の n 個の整数を $O(n)$ 時間で小さい順に整列できるか，理由とともに答えよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

2

For a given integer $k \geqq 2$, let $A_1, A_2, \ldots, A_k$ be given arrays, where each array A_i contains $n_i \geqq 1$ integers sorted in an ascending order. Let $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, and assume that all n integers contained in the k arrays are distinct. Answer the following questions.

(i) Prove that sorting in an ascending order the $n_1 + n_2$ integers in the arrays A_1 and A_2 can be executed in $O(n_1 + n_2)$ time.

(ii) Prove that sorting in an ascending order the n integers in the arrays $A_1, A_2, \ldots, A_k$ can be executed in $O(n \log k)$ time.

(iii) Prove that selecting the k smallest integers out of the n integers in the arrays A_1, $A_2, \ldots, A_k$ can be executed in $O(k \log k)$ time.

(iv) Assume that $n_1 = 1$, and that $n_i = 2n_{i-1}$ for $i = 2, 3, \ldots, k$. Under this assumption, answer whether sorting in an ascending order the n integers in the arrays A_1, $A_2, \ldots, A_k$ can be executed in $O(n)$ time. Give reasons for your answer.

線形計画

$\boxed{3}$

集合 $X \subseteqq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $Y \subseteqq \mathbb{R}^n$, $Z \subseteqq \mathbb{R}^n$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i,\ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\} \\
Y &= \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i,\ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\} \\
Z &= \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} \leqq 1 \ \ (i = 1, \ldots, m) \right\}
\end{aligned}
$$

ここで, $^\top$ は転置記号であり, $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元定数ベクトルであり, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$ である.

以下の問いに答えよ.

(i) 集合 X と Y が凸集合であることを示せ.

(ii) $\boldsymbol{x} \in Y$ を $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとする. $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} > 0$ となる $\boldsymbol{z} \in Z$ が存在することを示せ.
ヒント：$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$ の最大化を考えよ.

(iii) $\boldsymbol{x} \in Y$ とする. 次の条件 (C1) と (C2) を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{z} \in Z$ が存在することを示せ.

(C1) $y_i > 0$ である任意の i に対して $(\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} = 1$

(C2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X$

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let sets $X \subseteqq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $Y \subseteqq \mathbb{R}^n$ and $Z \subseteqq \mathbb{R}^n$ be defined by

$$\begin{aligned} X &= \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i, \;\; \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\}, \\ Y &= \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i, \;\; \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\}, \\ Z &= \{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} \leqq 1 \;\; (i = 1, \ldots, m) \}, \end{aligned}$$

respectively. Here, $^\top$ denotes transposition, $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ are n-dimensional nonzero vectors, and $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$.

Answer the following questions.

(i) Show that the sets X and Y are convex.

(ii) Let $\boldsymbol{x} \in Y$ be a nonzero vector. Show that there exists $\boldsymbol{z} \in Z$ such that $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} > 0$. Hint: Consider the maximization of $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$.

(iii) Let $\boldsymbol{x} \in Y$. Show that there exist $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{z} \in Z$ such that the following conditions (C1) and (C2) hold.

(C1) $(\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} = 1$ for all i such that $y_i > 0$;

(C2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X$.

線形制御理論

$\boxed{4}$

制御系が図 1 で与えられているとする．ここで $P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は補償器であり

$$P(s) = \frac{-2s+1}{2s^2+5s+2}, \quad C(s) = \frac{1}{as+b}$$

である．ただし a, b は実定数であり，$(a,b) \neq (0,0)$ を満たす．また r は参照入力，e は偏差，y は出力である．以下の問いに答えよ．

(i) $(a,b) = (0,2)$ とする．このとき単位階段関数を参照入力とするときの出力を求めよ．

(ii) $a = 0$ とする．このとき制御系を安定化させる b をすべて求めよ．

(iii) $a = 0$ とする．このとき位相余裕を無限大とする b をすべて求めよ．

(iv) 単位階段関数に対する定常偏差が 0 となるような (a,b) をすべて求めよ．

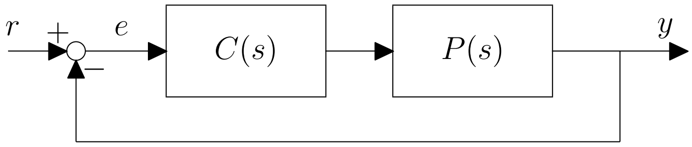


図 1: 制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

Figure 1 shows a control system with the plant $P(s)$ and the controller $C(s)$ given by

$$P(s) = \frac{-2s+1}{2s^2+5s+2}, \quad C(s) = \frac{1}{as+b},$$

where a and b are real constants satisfying $(a, b) \neq (0, 0)$. Moreover, r is a reference input, e is an error, and y is an output. Answer the following questions.

(i) Let $(a, b) = (0, 2)$. Calculate the output when the reference input is the unit step function.

(ii) Let $a = 0$. Find all the constant b for which the control system is stable.

(iii) Let $a = 0$. Find all the constant b which makes the phase margin infinity.

(iv) Find all the constants (a, b) for which the steady-state error for the unit step function is 0.

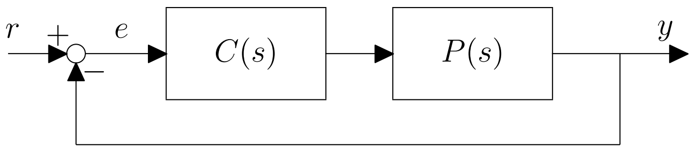


Figure 1: Control System

基礎力学

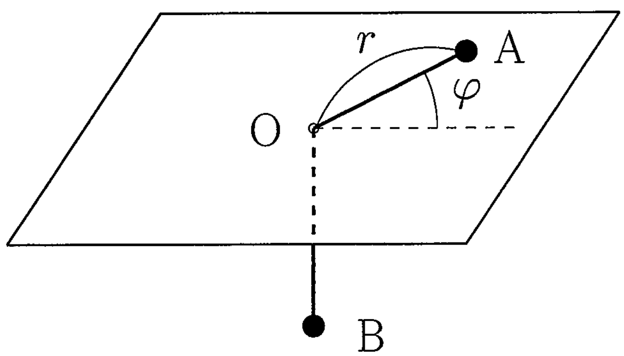
5

図に示すように，質量 M の粒子Aが滑らかな水平面上に拘束されて運動する．質量 m のもう1つの粒子Bは鉛直線上に拘束されて滑らかに運動する．2つの粒子を結ぶ質量の無視できる伸縮しない長さ ℓ の糸は，平面内の小さな穴Oを通り緩まないものとする．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．

(i) 図に示した，Aの位置の動径座標 r と角度座標 φ を用いてラグランジュ関数を書き下し，運動方程式を導け．

(ii) Aが半径 $r = r_0$ $(0 < r_0 < \ell)$ の等速円運動するときの角速度を求めよ．

(iii) (ii) の状態でAに $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向の微小な速度 v_0 (> 0) を加えた後の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向の振動の振動数と振幅を求めよ．



An English Translation:

Basic Mechanics

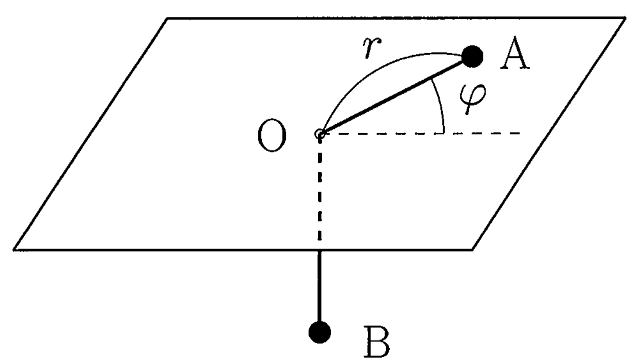
5

As shown in the figure, particle A of mass M is constrained to move on a smooth horizontal plane. Another particle B of mass m is constrained to move smoothly in a vertical line. The two particles are connected by a massless and unstretchable string of length ℓ, which passes through a small hole O in the plane and never slackens. Let g be the magnitude of the gravitational acceleration. Answer the following questions.

(i) Find the Lagrangian of the system with the use of r and φ, which are, respectively, the radial and angular coordinates at the position of A as shown in the figure and derive the equations of motion.

(ii) Obtain the angular velocity when A executes a uniform circular motion with radius $r = r_0$, where $0 < r_0 < \ell$.

(iii) Find the frequency and amplitude of the vibration along $\overrightarrow{OA}$ after a positive infinitesimal velocity v_0 along $\overrightarrow{OA}$ is added to A in the state of (ii).



基礎数学 II

$\boxed{6}$

$\mathrm{Mat}(n)$ を n 次複素正方行列全体の集合とする．$A \in \mathrm{Mat}(n)$ に対して線形写像

$$f_A : \mathrm{Mat}(n) \to \mathrm{Mat}(n)$$

を

$$f_A(X) = AX - XA$$

で定める．A が異なる n 個の固有値をもつと仮定し，O は n 次ゼロ行列とする．以下の問いに答えよ．

(i) $n = 2$ かつ $a \in \mathbb{C}$ で $X \in \mathrm{Mat}(2)$ が $\det(f_A(X)) = a$ を満たすとき，$f_A(X)$ の固有値を a を用いて表せ．

(ii) $X \in \mathrm{Mat}(n)$ が $f_A(X) = O$ を満たすとき，A と X は同じ正則行列により対角化できることを示せ．

(iii) $X, Y \in \mathrm{Mat}(n)$ が $f_A(X) = f_A(Y) = O$ を満たすとき，

$$XY = YX$$

が成り立つことを示せ．

(iv) A が対角行列であるとき，線形写像 f_A の像の次元 $\dim f_A(\mathrm{Mat}(n))$ を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let Mat(n) be the set of $n \times n$ complex matrices. For $A \in \mathrm{Mat}(n)$, define a linear map

$$f_A : \mathrm{Mat}(n) \to \mathrm{Mat}(n)$$

by

$$f_A(X) = AX - XA.$$

Assume that A has n distinct eigenvalues. Let O be the $n \times n$ zero matrix. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$ and $a \in \mathbb{C}$. Assume that $X \in \mathrm{Mat}(2)$ satisfies $\det(f_A(X)) = a$. Write the eigenvalues of $f_A(X)$ in terms of a.

(ii) Assume that $X \in \mathrm{Mat}(n)$ satisfies $f_A(X) = O$. Show that A and X are diagonalizable by a common non-singular matrix.

(iii) Assume that $X, Y \in \mathrm{Mat}(n)$ satisfy $f_A(X) = f_A(Y) = O$. Show the equality

$$XY = YX.$$

(iv) Assume that A is a diagonal matrix. Find the dimension $\dim f_A(\mathrm{Mat}(n))$ of the image of the linear map f_A.

応用数学

$\boxed{1}$

aを正の実数とし，上半平面 $H=\{z=x+yi \mid x,\ y\in\mathbb{R},\ y>0\}$ 上で定義された関数

$$f(z)=\frac{z+1-a}{z+1},\quad z\in H$$

について，以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $z\in H$ に対して，$f(z)\in H$ であることを示せ．

(ii) 任意の $w\in H$ に対して，$w=f(z)$ なる $z\in H$ が一意に存在することを示せ．

(iii) 1次分数変換 $w=f(z)$ による半円 $|z|=1$ $(z\in H)$ の像を求めよ．

(iv) $f(z)=z$ なる点 $z\in H$ の存在を調べ，存在する場合にはそれをすべて求めよ．

(v) 任意の $z\in H$ に対して，関数列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ を

$$f_1(z)=f(z),\quad f_n(z)=f(f_{n-1}(z))\quad (n=2,3,\ldots)$$

で定める．任意の $z\in H$ に対して $f_4(z)=f_1(z)$ が成り立つような正定数 a の値を求めよ．

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let a be a positive real number. Let H be the upper half plane defined by $H = \{z = x + yi \mid x,\ y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$. Consider the function

$$f(z) = \frac{z + 1 - a}{z + 1}, \quad z \in H.$$

Answer the following questions.

(i) Show that $f(z) \in H$ for any $z \in H$.

(ii) Show that there uniquely exists $z \in H$ such that $w = f(z)$ for any $w \in H$.

(iii) Find the image of the half circle $|z| = 1$ $(z \in H)$ by the linear fractional transformation $w = f(z)$.

(iv) Investigate the points $z \in H$ such that $f(z) = z$ and find all of them if they exist.

(v) Let us define a sequence of functions $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ by

$$f_1(z) = f(z), \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

for any $z \in H$. Find the positive number a such that $f_4(z) = f_1(z)$ for any $z \in H$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ，$N=[G,w]$ を G の各枝 $e \in E$ に非負実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．節点 u から節点 v への有向枝は (u,v) と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．節点 u から節点 v への距離 $\mathrm{dist}(u,v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める．以下の問いに答えよ．

(i) ある部分集合 $S \subsetneqq V$ と節点 $s \in S$ に対して，S から $V-S$ へ向かう枝 (u,v) の中で $\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v)$ の値を最小とする枝を (u^*,v^*) とする．このとき，$\mathrm{dist}(s,v^*)=\mathrm{dist}(s,u^*)+w(u^*,v^*)$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) N 上で始点 $s \in V$ からのダイクストラ法が $O(|E|\log|V|)$ 時間で実装できることを示せ．

(iii) N に負の枝重みを持つ枝を1本加えたとき，ダイクストラ法の出力する値は正しい距離とならないことがある．そのような具体例を $3 \leqq |V| \leqq 4$ で作成し，ダイクストラ法が正しい距離を計算しない過程を説明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a nonnegative real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\mathrm{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N. Answer the following questions.

(i) For a subset $S \subseteqq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges (u, v) directed from S to $V - S$. Prove that $\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.

(ii) Show that Dijkstra's algorithm can be implemented to run in $O(|E| \log |V|)$ time for a given start vertex $s \in V$ in N.

(iii) When an edge with a negative weight is added to N, Dijkstra's algorithm may fail to output the correct distance. Construct such an example with $3 \leqq |V| \leqq 4$, and explain how Dijkstra's algorithm fails to compute the correct distance.

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ を $n \times n$ の正定値対称行列とする．さらに，関数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= -\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\
g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z} \\
h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

ただし，$^\top$ は転置記号である．

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ をパラメータにもつ次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P1}(\boldsymbol{z}) : \quad & \text{Maximize} & & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
& \text{subject to} & & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P2}(\boldsymbol{z}) : \quad & \text{Minimize} & & g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
& \text{subject to} & & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P3}(\boldsymbol{z}) : \quad & \text{Minimize} & & h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
& \text{subject to} & & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ と $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ である．

任意のパラメータ $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解をもつ．$\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の最適解をそれぞれ $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z})$，$(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{z} \leqq 4$ とする．カルーシュ・キューン・タッカー（Karush-Kuhn-Tucker）条件を用いて $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ の最適解 $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$ を求めよ．($\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ が最大化問題であることに注意すること．)

(ii) カルーシュ・キューン・タッカー条件を用いて $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の最適解 $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ を求めよ．

(iii) 次の命題について，真であれば証明をし，偽であれば反例を与えよ．

(a) 関数 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $p(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ としたとき，関数 p は凸関数である．

(b) 関数 $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $q(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ としたとき，関数 q は凸関数である．

(c) 関数 $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $r(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ としたとき，関数 r は凸関数である．

An English Translation:

Operations Research

3

Let $\boldsymbol{A}$ be an $n \times n$ symmetric positive definite matrix. Moreover, let functions $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= -\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}, \\ h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

respectively. Here $^\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problems with a parameter $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{P1}(\boldsymbol{z}): \begin{array}{ll} \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1, \end{array} \qquad \mathrm{P2}(\boldsymbol{z}): \begin{array}{ll} \text{Minimize} & g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

$$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z}): \begin{array}{ll} \text{Minimize} & h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ are $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, respectively.

For any parameter vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, problems $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ have unique solutions. Let $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z})$ and $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ be the solutions of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$, respectively.

Answer the following questions.

(i) Suppose that $\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqq 4$. Obtain the solution $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$ of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$. (Note that $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ is a maximization problem.)

(ii) Obtain the solution $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ of $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$.

(iii) Prove or disprove the following propositions, giving a proof or a counterexample.

(a) Let $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $p(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$. Then p is a convex function.

(b) Let $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $q(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$. Then q is a convex function.

(c) Let $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $r(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$. Then r is a convex function.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^2$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし，$^\top$ は転置をあらわす．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) $u(t) = 0$ のとき，$V(x) = x^\top Px$ が $\dfrac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top x(t)$ を満たす正定値対称行列 $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ の存在性を判定せよ．

(ii) $u(t) = 0$，$W(x(0)) = \displaystyle\int_0^\infty x(t)^\top x(t)dt$ とする．このとき $x(0)^\top x(0) \leqq 1$ のもとでの $W(x(0))$ の最大値を求めよ．

(iii) $J(u) = \displaystyle\int_0^\infty \left(y(t)^2 + u(t)^2\right) dt$ を最小化する $u(t)$ は，適切な $k \in \mathbb{R}$ を用いて $u(t) = \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix} x(t)$ と表すことができるか答えよ．

(iv) $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．このとき，(iii) の $J(u)$ を最小化する $u(t)$ のもとで，$x(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \; y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^2$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Let $u(t) = 0$. Determine whether there exists a symmetric positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ such that $V(x) = x^\top Px$ satisfies $\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top x(t)$.

(ii) Let $u(t) = 0$ and $W(x(0)) = \int_0^\infty x(t)^\top x(t)dt$. Then, find the maximum value of $W(x(0))$ under the constraint $x(0)^\top x(0) \leqq 1$.

(iii) Determine whether $u(t)$ that minimizes $J(u) = \int_0^\infty \left(y(t)^2 + u(t)^2\right) dt$ can be represented as $u(t) = \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix} x(t)$ by choosing a suitable $k \in \mathbb{R}$.

(iv) Let $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Find $x(t)$ under the control input $u(t)$ that minimizes $J(u)$ defined in (iii).

物理統計学

$\boxed{5}$

単原子分子からなる古典的な理想気体の熱平衡状態において分子の速度を $\vec{v}$, その x 成分, y 成分, z 成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z とする. この時, 速度の x 成分が v_x と $v_x + dv_x$ の間にある確率が, その y 成分 v_y, z 成分 v_z によらず $f(v_x)dv_x$ によって与えられるとする. 同様に, 速度の y 成分が v_y と $v_y + dv_y$ の間にある確率, z 成分が v_z と $v_z + dv_z$ の間にある確率が, それぞれ, $f(v_y)dv_y$, $f(v_z)dv_z$ によって, 与えられるとする. 更に, 速度の x 成分が v_x と $v_x + dv_x$ の間にあると同時に, y 成分が v_y と $v_y + dv_y$ との間にあり, z 成分が v_z と $v_z + dv_z$ との間にある確率は,

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z = g(v^2)dv_xdv_ydv_z$$

と書けるとする. 但し, f と g はなめらかな関数であり, 分子の速さを $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(i) 次式が成立することを示せ.

$$\frac{1}{2v_x}\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} = \frac{1}{2v_y}\frac{f'(v_y)}{f(v_y)} = \frac{1}{2v_z}\frac{f'(v_z)}{f(v_z)} = \frac{g'(v^2)}{g(v^2)}.$$

(ii) 次式が成立することを示せ. 但し, α は正の定数とする.

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_x^2}, \quad f(v_y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_y^2}, \quad f(v_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_z^2}.$$

(iii) 分子の速さが, v と $v + dv$ との間にある確率 $F(v)dv$ を求めよ.

(iv) (iii) の確率密度関数 $F(v)$ が極大値となる最も確からしい速度 (most probable speed) v_0 を求めよ.

(v) 平均二乗速度 (root mean square speed) v_s を求めよ. 但し, 平均二乗速度とは「速さの二乗平均の平方根」のことである.

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let v be the speed of a particle in a classical ideal monoatomic gas in thermal equilibrium, and let v_x, v_y and v_z, respectively, denote the velocity components in the x, y and z directions. Let us denote the probabilities of gas molecules with the velocity components between v_x and $v_x + dv_x$, v_y and $v_y + dv_y$, and v_z and $v_z + dv_z$, by $f(v_x)dv_x$, $f(v_y)dv_y$, and $f(v_z)dv_z$, respectively. Let us assume that the probability of gas molecules having the velocity components between v_x and $v_x + dv_x$, v_y and $v_y + dv_y$, and v_z and $v_z + dv_z$, simultaneously is given by

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z = g(v^2)dv_x dv_y dv_z,$$

where f and g are smooth functions and $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Answer the following questions.

(i) Show that the following relation holds:

$$\frac{1}{2v_x}\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} = \frac{1}{2v_y}\frac{f'(v_y)}{f(v_y)} = \frac{1}{2v_z}\frac{f'(v_z)}{f(v_z)} = \frac{g'(v^2)}{g(v^2)}.$$

(ii) Show that the following relations hold:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_x^2}, \quad f(v_y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_y^2}, \quad f(v_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha v_z^2},$$

where α is a positive constant.

(iii) Obtain the probability $F(v)dv$ of the speed being between v and $v + dv$.

(iv) Obtain the most probable speed v_0 such that the probability density $F(v)$ given in (iii) has a maximum at the speed $v = v_0$.

(v) Obtain the root mean square speed v_s.

力学系数学

6

n を自然数，ij 成分が

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}); \\ t & (i = j + 1 \text{ のとき}); \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

の n 次正方行列を $A(t)$ として，$t > 0$ において n 元連立線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(i) $n = 1$ のとき一般解を求めよ．

(ii) $n = 2$ のとき一般解を求めよ．

(iii) 任意の自然数 n に対して一般解を求めよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let n be a positive integer and let $A(t)$ be an $n \times n$ matrix whose ij-component is given by

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & (\text{for } i = j); \\ t & (\text{for } i = j+1); \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Consider the n-dimensional system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Here $t > 0$. Answer the following questions.

(i) Obtain a general solution when $n = 1$.

(ii) Obtain a general solution when $n = 2$.

(iii) Obtain a general solution when n is an arbitrary positive integer.