基礎数学 II

$\boxed{6}$

$\mathrm{Mat}(n)$ を n 次複素正方行列全体の集合とする．$A \in \mathrm{Mat}(n)$ に対して線形写像

$$f_A : \mathrm{Mat}(n) \to \mathrm{Mat}(n)$$

を

$$f_A(X) = AX - XA$$

で定める．A が異なる n 個の固有値をもつと仮定し，O は n 次ゼロ行列とする．以下の問いに答えよ．

(i) $n = 2$ かつ $a \in \mathbb{C}$ で $X \in \mathrm{Mat}(2)$ が $\det(f_A(X)) = a$ を満たすとき，$f_A(X)$ の固有値を a を用いて表せ．

(ii) $X \in \mathrm{Mat}(n)$ が $f_A(X) = O$ を満たすとき，A と X は同じ正則行列により対角化できることを示せ．

(iii) $X, Y \in \mathrm{Mat}(n)$ が $f_A(X) = f_A(Y) = O$ を満たすとき，

$$XY = YX$$

が成り立つことを示せ．

(iv) A が対角行列であるとき，線形写像 f_A の像の次元 $\dim f_A(\mathrm{Mat}(n))$ を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $\mathrm{Mat}(n)$ be the set of $n \times n$ complex matrices. For $A \in \mathrm{Mat}(n)$, define a linear map

$$f_A : \mathrm{Mat}(n) \to \mathrm{Mat}(n)$$

by

$$f_A(X) = AX - XA.$$

Assume that A has n distinct eigenvalues. Let O be the $n \times n$ zero matrix. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$ and $a \in \mathbb{C}$. Assume that $X \in \mathrm{Mat}(2)$ satisfies $\det(f_A(X)) = a$. Write the eigenvalues of $f_A(X)$ in terms of a.

(ii) Assume that $X \in \mathrm{Mat}(n)$ satisfies $f_A(X) = O$. Show that A and X are diagonalizable by a common non-singular matrix.

(iii) Assume that $X, Y \in \mathrm{Mat}(n)$ satisfy $f_A(X) = f_A(Y) = O$. Show the equality

$$XY = YX.$$

(iv) Assume that A is a diagonal matrix. Find the dimension $\dim f_A(\mathrm{Mat}(n))$ of the image of the linear map f_A.