グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ，$N=[G,w]$ を G の各枝 $e\in E$ に非負実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．節点 u から節点 v への有向枝は (u,v) と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．節点 u から節点 v への距離 $\mathrm{dist}(u,v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める．以下の問いに答えよ．

(i) ある部分集合 $S\subsetneqq V$ と節点 $s\in S$ に対して，S から $V-S$ へ向かう枝 (u,v) の中で $\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v)$ の値を最小とする枝を (u^*,v^*) とする．このとき，$\mathrm{dist}(s,v^*)=\mathrm{dist}(s,u^*)+w(u^*,v^*)$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) N 上で始点 $s\in V$ からのダイクストラ法が $O(|E|\log|V|)$ 時間で実装できることを示せ．

(iii) N に負の枝重みを持つ枝を1本加えたとき，ダイクストラ法の出力する値は正しい距離とならないことがある．そのような具体例を $3\leqq|V|\leqq 4$ で作成し，ダイクストラ法が正しい距離を計算しない過程を説明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a nonnegative real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\mathrm{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N. Answer the following questions.

(i) For a subset $S \subseteqq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges (u, v) directed from S to $V - S$. Prove that $\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.

(ii) Show that Dijkstra's algorithm can be implemented to run in $O(|E| \log |V|)$ time for a given start vertex $s \in V$ in N.

(iii) When an edge with a negative weight is added to N, Dijkstra's algorithm may fail to output the correct distance. Construct such an example with $3 \leqq |V| \leqq 4$, and explain how Dijkstra's algorithm fails to compute the correct distance.