現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^2$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし，$^\top$ は転置をあらわす．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) $u(t) = 0$ のとき，$V(x) = x^\top Px$ が $\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top x(t)$ を満たす正定値対称行列 $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ の存在性を判定せよ．

(ii) $u(t) = 0$，$W(x(0)) = \int_0^\infty x(t)^\top x(t)dt$ とする．このとき $x(0)^\top x(0) \leqq 1$ のもとでの $W(x(0))$ の最大値を求めよ．

(iii) $J(u) = \int_0^\infty \left(y(t)^2 + u(t)^2\right) dt$ を最小化する $u(t)$ は，適切な $k \in \mathbb{R}$ を用いて $u(t) = \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix} x(t)$ と表すことができるか答えよ．

(iv) $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．このとき，(iii) の $J(u)$ を最小化する $u(t)$ のもとで，$x(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^2$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Let $u(t) = 0$. Determine whether there exists a symmetric positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ such that $V(x) = x^\top Px$ satisfies $\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top x(t)$.

(ii) Let $u(t) = 0$ and $W(x(0)) = \int_0^\infty x(t)^\top x(t)dt$. Then, find the maximum value of $W(x(0))$ under the constraint $x(0)^\top x(0) \leqq 1$.

(iii) Determine whether $u(t)$ that minimizes $J(u) = \int_0^\infty \left(y(t)^2 + u(t)^2\right) dt$ can be represented as $u(t) = \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix} x(t)$ by choosing a suitable $k \in \mathbb{R}$.

(iv) Let $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Find $x(t)$ under the control input $u(t)$ that minimizes $J(u)$ defined in (iii).