基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ．

(i) 三角関数 $\tan x$, $\cot x$ についての加法公式

$$\frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\cot x - \cot 2x$$

を用いて $\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{x}{2^k}$ の無限和と $\cot x$ に関する等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$$

を示せ．

(ii) 双曲線関数 $\tanh x$, $\coth x$ についての加法公式を与えよ．さらにこれを利用して，$\dfrac{1}{2^k}\tanh\dfrac{x}{2^k}$ の無限和と $\coth x$ に関する等式を導出せよ．ただし，これらの双曲線関数は，実数 x について

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x},\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

によって定義される．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Answer the following questions.

(i) Show the equality with respect to $\cot x$ and the infinite sum of $\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{x}-\cot x,$$

by using the addition formula

$$\frac{1}{2}\tan x=\frac{1}{2}\cot x-\cot 2x$$

of the trigonometric functions $\tan x$ and $\cot x$.

(ii) Find an addition formula of the hyperbolic functions $\tanh x$ and $\coth x$. Then, derive an equality with respect to $\coth x$ and an infinite sum of $\frac{1}{2^k}\tanh\frac{x}{2^k}$ by using this addition formula, where these hyperbolic functions are defined by

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

for a real number x.