オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ とする．さらに，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は次の不等式を満たす連続的微分可能な関数とする．

$$\begin{aligned} &\alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \\ &\quad \geqq \ f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) + \alpha(1-\alpha)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

ただし，$^\top$ は転置記号である．

次の非線形計画問題 P を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & -f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{array}$$

さらに，パラメータ $\boldsymbol{z} \in \Omega$ をもつ次の凸 2 次計画問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & -\nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{array}$$

ただし，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega$ に対して，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla f(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

(ii) 問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(iii) 任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})) \leqq -(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z})^\top(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z})$$

(iv) 次の命題 (A) について，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．

(A) $\boldsymbol{z} \in \Omega$ かつ $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$ であれば，$\boldsymbol{z}$ は問題 P の局所的最適解である．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1 \ (i = 1, \dots, n)\}$, and let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function satisfying

$$\begin{aligned} &\alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \\ &\quad \geqq f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) + \alpha(1-\alpha)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1], \end{aligned}$$

where the superscript $^\top$ denotes the transposition of a vector.

Consider the following nonlinear programming problem P.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & -f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{array}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ with a vector $\boldsymbol{z} \in \Omega$ of parameters:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & -\nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ represents decision variables of $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$. For any $\boldsymbol{z} \in \Omega$ problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})$.

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for any $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla f(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

(ii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$.

(iii) Show that the following inequality holds for any $\boldsymbol{z} \in \Omega$.

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})) \leqq -(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z})^\top(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}).$$

(iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.

(A) If $\boldsymbol{z} \in \Omega$ and $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$, then $\boldsymbol{z}$ is a local optimal solution to problem P.