力学系数学

6

$a(t), b(t)$ を t のある有理式として次の実微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．

(i) $k \geqq 1$ をある整数として，$x = t^k$ が式 (1) の解であるための $a(t), b(t)$ に関する必要十分条件を求めよ．

以下では，ある整数 $k \geqq 1$ に対して (i) で求めた条件が成り立つものとし，$\phi(t)$ を t^k と線形独立な解として，

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t)$$

とおく．

(ii) $a(t), b(t)$ を $p(t)$ を用いて表わせ．

(iii) $p(t) = t$ のとき $a(t), b(t)$ を定めよ．

(iv) 式 (1) のすべての解が定数でない多項式のとき，$a(t), b(t)$ は多項式でないことを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

6

Let $a(t)$ and $b(t)$ be rational functions of t. Consider the real ordinary differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{1}$$

Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition on $a(t)$ and $b(t)$ for $x = t^k$ to be a solution to Eq. (1) for each integer $k \geqq 1$.

In the following, assume that the condition obtained in (i) holds for an integer $k \geqq 1$, and let

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t),$$

where $\phi(t)$ is a solution which is linearly independent of t^k.

(ii) Write down $a(t)$ and $b(t)$ in terms of $p(t)$.

(iii) Determine $a(t)$ and $b(t)$ when $p(t) = t$.

(iv) Show that $a(t)$ and $b(t)$ are not polynomials if all solutions to Eq. (1) are nonconstant polynomials.