基礎力学

$\boxed{5}$

任意の正実数 λ について, 次式

$$U(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n U(x_1, x_2, x_3)$$

がデカルト座標の任意の点 (x_1, x_2, x_3) で成立する n 次の同次関数ポテンシャル U か, または

$$V(r) = g\frac{e^{-\kappa r}}{r^s} \quad (g > 0, \kappa \geqq 0, s > 0)$$

で与えられるポテンシャル V を受ける質量 m の質点の運動を考える. ただし, ここでは質点の座標 (x_1, x_2, x_3) と速度は常に位相空間上で有界であると仮定し, 運動エネルギーを T, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, 及び関数 $G(t)$ の時間平均 $\langle G \rangle$ を $\langle G \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t G(t)dt$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(i) 同次関数ポテンシャル U を受ける運動に対して, 次の等式が成立することを示せ.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(mr^2) = 2T - nU.$$

(ii) 同次関数ポテンシャル U を受ける運動に対して, 次の等式が成立することを示せ.

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2}\langle U \rangle.$$

(iii) 同次関数ポテンシャル U を受ける運動の全エネルギー $T+U$ を与えるハミルトニアン関数を H とする. $\langle T \rangle = |\langle H \rangle| > 0$ が成立するときの同次関数ポテンシャル U の次数 n を求めよ.

(iv) ポテンシャル V を受ける運動のハミルトニアン関数 $H = T + V$ について, 次の関係が成立することを示せ.

$$\frac{2-s}{2}\langle V \rangle - \frac{\kappa}{2}\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}\langle V^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leqq \langle H \rangle \leqq \frac{2-s}{2}\langle V \rangle.$$

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

Consider a motion of a mass point with the mass m affected either by the potential U given by the n-th order homogeneous function such that for any positive real number λ the relation

$$U(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n U(x_1, x_2, x_3)$$

holds for any positions (x_1, x_2, x_3) of the Cartesian coordinates, or by the potential V given by

$$V(r) = g\frac{e^{-\kappa r}}{r^s} \quad (g > 0, \kappa \geqq 0, s > 0).$$

Here, the positions (x_1, x_2, x_3) and the velocities of the mass point are assumed to be bounded in the phase space. We define T as the kinetic energy, and let $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ and the time average $\langle G \rangle$ of a function G is defined by $\langle G \rangle = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(t)dt$. Answer the following questions (i)-(iv).

(i) Show that

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(mr^2) = 2T - nU$$

for a motion affected by the homogeneous potential U.

(ii) Show that

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2}\langle U \rangle$$

for a motion affected by the homogeneous potential U.

(iii) Determine the degree n of a homogeneous potential function U which satisfies the relation $\langle T \rangle = |\langle H \rangle| > 0$, where the Hamiltonian function H is given by the total energy $T + U$ for a motion affected by the homogeneous potential U.

(iv) Show that

$$\frac{2-s}{2}\langle V \rangle - \frac{\kappa}{2}\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle V^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leqq \langle H \rangle \leqq \frac{2-s}{2}\langle V \rangle$$

in the case of the Hamiltonian function $H = T + V$ for a motion affected by the potential V.