

アルゴリズム基礎

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V , 枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし, 節点 u の隣接点の集合を $N(u)$ と書く. G の部分グラフ H における節点 u から節点 v への最短経路内の枝数を $\text{dist}_H(u, v)$ と書き, H における節点 u から節点 v への最短経路の総数を $\sigma_H(u, v)$ と書く. 始点 $s \in V$ を選び, T を s からの幅優先探索により得られた G の全域木とする. 以下の問いに答えよ.

- (i) T を用いて, $d_{\max} = \max\{\text{dist}_G(s, u) \mid u \in V\}$ および $V_i = \{u \in V \mid \text{dist}_G(s, u) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, d_{\max}$ を $O(|V|)$ 時間で計算する方法を示せ.
- (ii) $\{\sigma_G(s, u) \mid u \in V\}$ 内のすべての値を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ.
- (iii) ある節点 $t \in V - \{s\}$ と節点の部分集合 $A \subseteq V - \{s, t\}$ に対して, G における s から t への最短経路のうち, A の節点を1個は通過するものの個数を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ.
- (iv) ある節点 $t \in V - \{s\}$ と節点の部分集合 $A \subseteq V - \{s, t\}$ に対して, G における s から t への最短経路のうち, A の節点を少なくとも2個通過するものが存在するかどうかの判定を $O(|E|)$ 時間で行う方法を示せ.

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E , and let $N(u)$ denote the set of neighbors of a vertex u in G . For a subgraph H of G , let $\text{dist}_H(u, v)$ denote the number of edges in a shortest path from a vertex u to a vertex v in H , and let $\sigma_H(u, v)$ denote the number of shortest paths from a vertex u to a vertex v in H . For a start vertex $s \in V$, let T denote a spanning tree of G obtained by the breadth-first search executed from s . Answer the following questions.

- (i) Show how to compute in $O(|V|)$ time $d_{\max} = \max\{\text{dist}_G(s, u) \mid u \in V\}$ and $V_i = \{u \in V \mid \text{dist}_G(s, u) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, d_{\max}$ from T .
- (ii) Show how to compute in $O(|E|)$ time all values in $\{\sigma_G(s, u) \mid u \in V\}$.
- (iii) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subseteq V - \{s, t\}$ are given. Show how to compute in $O(|E|)$ time the number of shortest paths from s to t in G which pass through at least one vertex in A .
- (iv) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subseteq V - \{s, t\}$ are given. Show how to test in $O(|E|)$ time whether there is a shortest path from s to t in G which passes through at least two vertices in A .