現代制御論

4

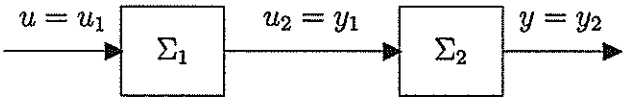

図 1：直列接続

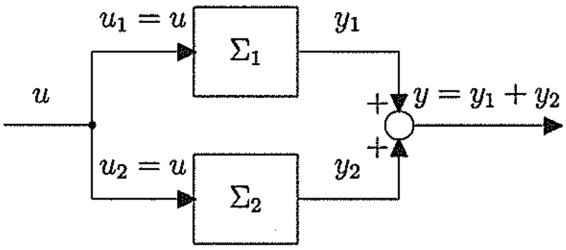

図 2：並列接続

線形動的システム Σ_1, Σ_2 が線形状態方程式

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

で記述されている．ただし $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ はそれぞれのシステムの状態ベクトル，$u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの入力，$y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの出力である．また $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, $D_2 \in \mathbb{R}$ とする．以下の問い (i)-(v) に答えよ．

(i) 図 1 の直列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ととるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(ii) 図 2 の並列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ととるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(iii) この小問では,

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0$$

として，システム Σ_1, Σ_2 を定め，図1のように直列接続されたシステムを考える．ただし k は実数である．このシステムの可観測性を調べよ．次に，Σ_1 の初期値を $x_1(0) = 3$ とする．適当な Σ_2 の初期値 $x_2(0)$ を選択し，直列接続されたシステムの入力 $u(t)$ を恒等的に 0 とすると，出力 $y(t)$ も恒等的に 0 になった．このとき k と $x_2(0)$ を求めよ．

(iv) システム Σ_1 が可観測であるためには行列

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1 - 1} \end{bmatrix}$$

が正則であることが必要十分であることが知られている．この条件は，A_1 の任意の固有ベクトル $z \neq 0$ が $C_1 z \neq 0$ を満たすことと等価であることを証明せよ．

(v) システム Σ_1, Σ_2 は可観測であるとする．このとき (ii) で与えた状態方程式が可観測であるための必要十分条件は，行列 A_1, A_2 が共通固有値を持たないことを証明せよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

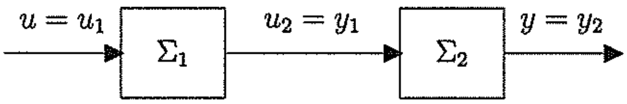

Fig.1: Series connection

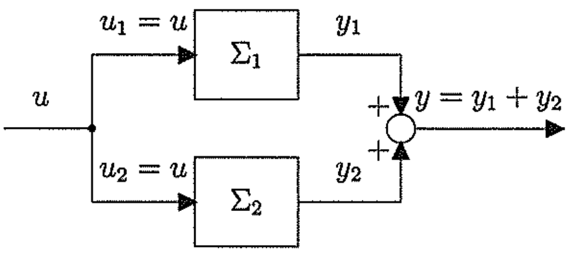

Fig.2: Parallel connection

Linear dynamical systems Σ_1 and Σ_2 are described by the linear state equations:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases},$$

where $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ are the state vectors, $u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ are the inputs, and $y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ are the outputs of the systems Σ_1, Σ_2, respectively. Furthermore, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, and $D_2 \in \mathbb{R}$. Answer the following questions (i)-(v).

(i) Describe the state equation of the system with series connection shown in Fig. 1 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Describe the state equation of the system with parallel connection shown in Fig. 2 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(iii) In this subproblem, consider the system with series connection shown in Fig. 1 where Σ_1 and Σ_2 are given by

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0,$$

and k is a real constant. Check the observability of the system. Let the initial condition of Σ_1 be given as $x_1(0) = 3$. Suppose that the output $y(t)$ of the system becomes identically 0 when the input $u(t)$ is identically 0 and the initial condition $x_2(0)$ of Σ_2 is appropriately selected. Determine k and $x_2(0)$.

(iv) It is known that the system Σ_1 is observable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

is nonsingular. Prove that this condition is equivalent to the statement that any eigenvector $z \neq 0$ of A_1 satisfies $C_1 z \neq 0$.

(v) Assume that the systems Σ_1 and Σ_2 are observable. Prove that the state equation derived in (ii) is observable if and only if the matrices A_1 and A_2 share no common eigenvalues.