Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成28年度4月期入学 / 平成27年度10月期入学)

Admissions for April 2016 / October 2015

Entrance Examination for Master's Program

Department of Applied Mathematics and Physics

Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成27年8月6日(木) 15:30 – 17:30

August 6, 2015, 15:30 – 17:30

基礎科目
Basic Subjects

選択科目 (Choice of Subjects):

基礎数学I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学II

Basic Mathematics I, Data Structures and Algorithms, Linear Programming, Linear Control Theory, Basic Mechanics, Basic Mathematics II

注意 (NOTES)

1. 上記科目から２科目選択すること。
   ３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

基礎数学 I

$\boxed{1}$

実数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sqrt{6}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(i) 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であることを示せ．

(ii) n が増加するとき数列 $\{a_n\}$ は単調に増加することを示せ．

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$V = \{v_i = (a_i, b_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ を n ($\geqq 2$) 個の整数の対の集合とする．二つの対 $v_j, v_k \in V$ の距離 $d(v_j, v_k)$ を $|a_j - a_k| + |b_j - b_k|$ と定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の二対 $v_j, v_k \in V$ に対し，$d(v_j, v_k) = \max\{|(a_j + b_j) - (a_k + b_k)|, |(-a_j + b_j) - (-a_k + b_k)|\}$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\max_{v_j, v_k \in V} d(v_j, v_k)$ を求める $O(n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

(iii) 二対 $v_j, v_k \in V$ に対し，ある整数 $L \geqq 1$, h, ℓ があり，$|a_j - hL| \leqq L$, $|a_k - hL| \leqq L$, $|b_j - \ell L| \leqq L$, $|b_k - \ell L| \leqq L$ であれば，$d(v_j, v_k) \leqq 4L$ が成り立つことを示せ．

(iv) 与えられた整数 $L \geqq 1$ に対し，$d(v_j, v_k) \leqq 4L$ である二対 $v_j, v_k \in V$ ($j \neq k$) が存在するかどうかを判定する $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

線形計画

$\boxed{3}$

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続的微分可能な凸関数とする．さらに，$\nabla f(\boldsymbol{x})$ を次式で定義される関数 f の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ における勾配とする．

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^\top$$

ただし，$^\top$ は転置記号を表す．

次の線形計画問題 P を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P:} & \text{Minimize} & \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{b} \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．問題 P は最適解を持つとする．

以下の問いに答えよ．

(i) $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} \geqq 0$ である任意の $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}) \geqq f(\bar{\boldsymbol{x}})$ となることを示せ．

(ii) 問題 P の双対問題を書け．

(iii) $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}$ とする．このとき，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqq \boldsymbol{b}$ である任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{z}) \geqq f(\bar{\boldsymbol{x}})$ であることを示せ．

線形制御理論

$\boxed{4}$

図1の制御系を考える．ただし，$P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は制御器，r は参照入力，e は偏差，y は出力とする．このとき，

$$P(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$$

として，以下の問いに答えよ．

(i) $P(s)$ の安定性を判別し，零点をすべて求めよ．

(ii) $P(s)$ とゲイン線図が一致する安定な伝達関数 $Q(s)(\neq \pm P(s))$ を1つ求めよ．

(iii) 任意のステップ入力 $r(t)$ に対して $e(t)$ が $t \to \infty$ において0に収束する $C(s)$ が存在するか理由とともに答えよ．

(iv) 振幅1の任意の正弦波入力 $r(t)$ に対して十分大きい t では $|e(t)| < 0.9$ となる $C(s)$ が存在するか理由とともに答えよ．

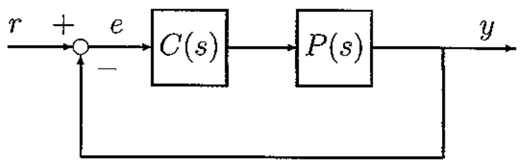

図1: 制御系

基礎力学

$\boxed{5}$

平面内で中心力を受けて運動している質量 m の質点の位置を $(x(t), y(t))$, その極座標表示を $(r(t), \phi(t))$ とする．但し，力の中心を座標原点とし，$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を満足する．以下の問いに答えよ．

(i) 速度 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を極座標表示 (r, ϕ) で表せ.

(ii) 加速度 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を極座標表示 (r, ϕ) で表せ.

(iii) $r^2\dfrac{d\phi}{dt}$ が時刻 t に依らず, 一定値であることを示せ.

(iv) $h = r^2\dfrac{d\phi}{dt}$ とおく．中心力が $\dfrac{m\mu}{r^2}$ の大きさの引力 (μ は正の定数) である時, 力学的エネルギー E を求め, 運動が $0 < t < \infty$ で有界であるための力学的エネルギー E の取りうる範囲を求めよ．但し, K を運動エネルギーとし, 実効ポテンシャルエネルギー $U = E - K$ が, $r \to \infty$ の時 $U \to 0$ を満足するように E を規準化する.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 実対称行列とし，任意の非零な n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ とその転置 $\boldsymbol{x}^\top$ によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ は正であるとする．以下の問いに答えよ．

(i) 行列 A の対角成分 a_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ は全て正であることを示せ．

(ii) 行列 A の固有値 λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ は全て正であることを示せ．

(iii) 行列 A は正則であることを示せ．

(iv) $n \geqq 3$ のとき行列 A の第 i_1, i_2, $\ldots$, i_r 行，第 i_1, i_2, $\ldots$, i_r 列 $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$ を取り出して作った $r \times r$ $(1 < r < n)$ 行列 A_r について考える．例えば，$r = 2$ のとき

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

である．任意の非零な r 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}_r$ によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}_r^\top A_r \boldsymbol{x}_r$ は正であることを示せ．

(v) 任意の $n \times n$ $(n \geqq 2)$ 実行列 B に対して $B^\top B$ は実対称行列となる．$B^\top B = (b_{ij})$ とおき，対角成分 b_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ は全て正であると仮定する．そのような B に対して，任意の非零な n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ について 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top B^\top B \boldsymbol{x}$ は正となるか，理由をつけて答えよ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers defined by

$$a_1 = \sqrt{6}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Answer the following questions.

(i) Show that the sequence $\{a_n\}$ is bounded from above.

(ii) Show that the sequence $\{a_n\}$ is monotonically increasing as n increases.

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $V = \{v_i = (a_i, b_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ be a set of n ($\geqq 2$) pairs of integers. The distance $d(v_j, v_k)$ between two pairs $v_j, v_k \in V$ is defined to be $|a_j - a_k| + |b_j - b_k|$. Answer the following questions.

(i) Prove that, for two pairs $v_j, v_k \in V$, it holds that $d(v_j, v_k) = \max\{|(a_j + b_j) - (a_k + b_k)|, |(-a_j + b_j) - (-a_k + b_k)|\}$.

(ii) Give an $O(n)$-time algorithm for computing $\max_{v_j, v_k \in V} d(v_j, v_k)$.

(iii) Prove that, for two pairs $v_j, v_k \in V$, if there are integers $L \geqq 1$, h and ℓ such that $|a_j - hL| \leqq L$, $|a_k - hL| \leqq L$, $|b_j - \ell L| \leqq L$ and $|b_k - \ell L| \leqq L$, then it holds that $d(v_j, v_k) \leqq 4L$.

(iv) Give an $O(n \log n)$-time algorithm that, for a given integer $L \geqq 1$, tests whether V contains pairs v_j and v_k ($j \neq k$) such that $d(v_j, v_k) \leqq 4L$ or not.

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable convex function. Moreover, let $\nabla f(\boldsymbol{x})$ be the gradient of f at $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, which is defined by

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \right)^\top,$$

where the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector.

Consider the following linear programming problem P.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{b}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $m \times n$ constant matrix, $\boldsymbol{b}$ is an m-dimensional constant vector, $\bar{\boldsymbol{x}}$ is an n-dimensional constant vector, and $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables. Suppose that P has an optimal solution.

Answer the following questions.

(i) Show that $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}) \geqq f(\bar{\boldsymbol{x}})$ for any $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ such that $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} \geqq 0$.

(ii) Write out the dual problem of problem P.

(iii) Suppose that $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}$. Then show that $f(\boldsymbol{z}) \geqq f(\bar{\boldsymbol{x}})$ for any $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ such that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqq \boldsymbol{b}$.

An English Translation:

Linear Control Theory

4

Figure 1 shows a control system with the plant $P(s)$, the controller $C(s)$, the reference input r, the error e, and the observation y. Let

$$P(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1},$$

and answer the following questions.

(i) Determine the stability of $P(s)$ and find all the zeros of $P(s)$.

(ii) Find a stable transfer function $Q(s)(\neq \pm P(s))$ that has the same gain diagram as $P(s)$.

(iii) Determine whether there exists $C(s)$ such that $e(t)$ converges to 0 as $t \to \infty$ for an arbitrary step input $r(t)$. The derivation process should be shown.

(iv) Determine whether there exists $C(s)$ such that $|e(t)| < 0.9$ for t sufficiently large for an arbitrary sinusoidal input $r(t)$ with the amplitude 1. The derivation process should be shown.

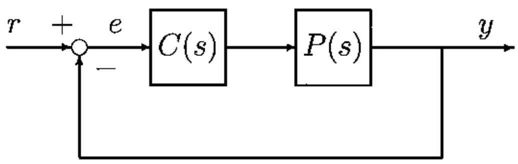

Figure 1: Control system

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Consider the planer motion of a particle with the mass m subject to a central force. Let $(x(t), y(t))$ be the position and let $(r(t), \phi(t))$ be the polar coordinates such that $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ and $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Let the center of the force be the origin of the coordinate system. Answer the following questions.

(i) Write the velocity $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ in terms of the polar coordinates (r, ϕ).

(ii) Write the acceleration $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ in terms of the polar coordinates (r, ϕ).

(iii) Show that $r^2\frac{d\phi}{dt}$ is a constant of motion.

(iv) Let $h = r^2\frac{d\phi}{dt}$. Suppose that the central force is an attractive force of the magnitude $\frac{m\mu}{r^2}$ with a constant $\mu(>0)$. Obtain the mechanical energy E and find the condition of E for the motion to be bounded for $0 < t < \infty$. Here E is determined such that the effective potential energy $U = E - K$ satisfies the relation $U \to 0$ as $r \to \infty$, where K is the kinetic energy.

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ real symmetric matrix. Let the quadratic form $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ be positive, where $\boldsymbol{x}$ is any nonzero n-dimensional vector and $\boldsymbol{x}^\top$ is the transpose of $\boldsymbol{x}$. Answer the following questions.

(i) Show that the diagonal elements a_{ii} of the matrix A are all positive.

(ii) Show that the eigenvalues λ_i of the matrix A are all positive.

(iii) Show that the matrix A is nonsingular.

(iv) Let $n \geqq 3$. Let A_r be a $r \times r$ $(1 < r < n)$ real symmetric matrix defined by extracting the i_1th, i_2th, $\ldots$, i_rth rows and the i_1th, i_2th, $\ldots$, i_rth columns $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$ from the $n \times n$ matrix A. For example,

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

for $r = 2$. Show that the quadratic form $\boldsymbol{x}_r^\top A_r \boldsymbol{x}_r$ is positive for any nonzero r-dimensional vector $\boldsymbol{x}_r$.

(v) The matrix $B^\top B = (b_{ij})$ is real symmetric for any $n \times n$ $(n \geqq 2)$ real matrix B. Suppose that the diagonal elements b_{ii} of $B^\top B$ are all positive. Is the quadratic form $\boldsymbol{x}^\top B^\top B \boldsymbol{x}$ positive for such B and for any nonzero n-dimensional vector $\boldsymbol{x}$? Give a reason for the answer.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成28年度4月期入学 / 平成27年度10月期入学)

Admissions for April 2016 / October 2015

Entrance Examination for Master's Program

Department of Applied Mathematics and Physics

Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成27年8月6日(木) 13:00 – 15:00

August 6, 2015, 13:00 – 15:00

専門科目
Major Subjects

選択科目 (Choice of Subjects) :

応用数学、グラフ理論、オペレーションズ・リサーチ、現代制御論、物理統計学、力学系数学

Applied Mathematics, Graph Theory, Operations Research, Modern Control Theory, Physical Statistics, Mathematics for Dynamical Systems

注意 (NOTES)

1. 上記科目から２科目選択すること。
   ３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

応用数学

$\boxed{1}$

n と $a>0$ を，それぞれ，自然数と実数とし，次式を満たす無限区間 $(-\infty,\infty)$ で定義された C^n 級関数 $f(x)$ を考える．

$$\lim_{x\to\pm\infty}|x|^a f(x)=1$$

$k\leqq n$ を自然数とする．$f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}_k(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(x)e^{-i\xi x}dx,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

とし，$\hat{f}_0(\xi)$ を $f(x)$ のフーリエ変換とする．また，任意の自然数 $j\leqq n$ に対して極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{a+j}f^{(j)}(x)$ が存在するものとする．以下の問いに答えよ．

(i) $f(x)$ が無限区間 $(-\infty,\infty)$ において可積分である，すなわち，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

が存在するための必要十分条件が $a>1$ であることを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{a+k}|f^{(k)}(x)|=\prod_{j=0}^{k-1}(a+j)$ となることを示せ．

(iii) $a>1$ のとき，$f^{(k)}(x)$ が無限区間 $(-\infty,\infty)$ において可積分となることを示せ．

(iv) $a>1$ のとき，$\hat{f}_k(\xi)$ を $\hat{f}_0(\xi)$ を用いて表わせ．

(v) 自然数 ℓ に対して $a>\ell+1$ であるとき，$\hat{f}_k(\xi)$ は $C^{k+\ell}$ 級であることを示せ．

グラフ理論

2

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，各枝 $e \in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与える．枝の部分集合 $F \subseteq E$ は，グラフ $(V, E-F)$ が非連結であり，この性質の下で極小であるとき G のカットセットと呼ばれる．以下の (i)-(iv) の各命題について，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．

(i) K を G の一つのカットセットとし，a を K の中で枝重みが最小である枝とする．このとき, G の任意の最小木は枝 a を含む.

(ii) K を G の一つのカットセットとし，a を K の中で枝重みが最小である枝とする．このとき, G には枝 a を含む最小木が存在する.

(iii) K を G の一つのカットセットとし，b を K の中で枝重みが最大である枝とする．このとき，G には枝 b を含まない最小木が存在する.

(iv) C を G の一つの閉路とし，a を C の中で枝重みが最小である枝とする．このとき，G には枝 a を含む最小木が存在する.

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は２回連続的微分可能な関数とし，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトルとする．

次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = 0 \end{array}$$

ただし，$^\top$ はベクトルの転置を表す．$\boldsymbol{x}^*$ を問題 P の大域的最適解とする．

さらに，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(k): & \text{Minimize} & f_k(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \leqq 1 \end{array}$$

ただし，k は非負の整数であり，$f_k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は以下に定義された関数である．

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{k}{2}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

問題 P(k) の大域的最適解を $\boldsymbol{x}^k$ とする．さらに，$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \bar{\boldsymbol{x}}$，$\lim_{k\to\infty} k(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^k) = \bar{\lambda}$ と仮定する．

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の非負の整数 k に対して $f_k(\boldsymbol{x}^k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*)$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}} = 0$，$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ．

(iii) 問題 P(k) のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(iv) 十分大きな k に対して，$\nabla f_k(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ．

(v) $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \bar{\lambda}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ．

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

で線形システムが表されている．ただし $x(t) \in \mathbb{R}^2$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．また

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とする．ただし a は実数である．このとき以下の問いに答えよ．

(i) このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ．

以下では，$a = 1$ として解答せよ．

(ii) 誤差ダイナミクスの固有値が $\{-1, -2\}$ となるように全状態オブザーバを構成してその状態方程式を示せ．

(iii) (ii) で与えたオブザーバの状態を $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ とするとき，

$$u = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + v$$

としてフィードバックを閉じる．ただし $v(t) \in \mathbb{R}$ は外生入力である．このとき閉ループ系の固有値ならびに v から y への伝達関数を求めよ．

物理統計学

5

X を尺度母数 $\gamma(>0)$ のコーシー分布に従う無限区間 $(-\infty,\infty)$ 上の実数値確率変数とし，その確率密度関数は $\rho_\gamma(x)=\dfrac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}$ で与えられるものとする．以下の問いに答えよ．

(i) 変換 $Y=\dfrac{1}{X}$ で定義される確率変数 Y も，尺度母数 $\gamma'=\dfrac{1}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma'}(x)$ に従うことを示せ．

(ii) 変換 $Z=\dfrac{1}{2}\left(X-\dfrac{1}{X}\right)$ で定義される確率変数 Z も，尺度母数 $\gamma''=\dfrac{1}{2}\left(\gamma+\dfrac{1}{\gamma}\right)$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma''}(x)$ に従うことを示せ．

(iii) 漸化式 $X_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(X_n-\dfrac{1}{X_n}\right)$, $X_0=X$ で定まる確率変数 X_n の確率密度関数 $p_n(x)$ は，任意の $\gamma>0$ に対して，$n\to\infty$ の時，標準コーシー分布の確率密度関数 $\rho_1(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ に収束することを示せ．

力学系数学

6

パラメータ $\mu > 0$ に依存した微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu^2$$

を考える．$t = 0$ における初期条件 $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ を満たす解を $\varphi_t(x_0; \mu)$ と表すとき，以下の問いに答えよ．

(i) 解 $\varphi_t(x_0; \mu)$ を求めよ．

(ii) 任意の $\mu > 0$ と $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して，$y = \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial x_0}(x_0; \mu)$ が微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(x_0; \mu) y$$

の解であることを示せ．

(iii) $t = 0$ における初期条件 $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ を満足する微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(0; 1) y$$

の解を求めよ．

(iv) $t = 0$ における初期条件 $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ を満足する微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(0; 1) y + 2$$

の解を求めよ．

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let n and $a > 0$ be a positive integer and a real number, respectively, and consider a C^n function $f(x)$ defined on the infinite interval $(-\infty, \infty)$ and satisfying

$$\lim_{|x|\to\pm\infty} |x|^a f(x) = 1.$$

Let $k \leqq n$ be a positive integer. Write the Fourier transform for the kth-order derivative $f^{(k)}(x)$ of $f(x)$ as

$$\hat{f}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

and let $\hat{f}_0(\xi)$ denote the Fourier transform of $f(x)$. Moreover, suppose that $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{a+j} f^{(j)}(x)$ exists for any positive integer $j \leqq n$. Answer the following questions.

(i) Show that a necessary and sufficient condition for $f(x)$ to be integrable on the infinite interval $(-\infty, \infty)$, that is, for the improper integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

to exist is $a > 1$.

(ii) Show that $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{a+k} |f^{(k)}(x)| = \prod_{j=0}^{k-1} (a + j)$.

(iii) Show that $f^{(k)}(x)$ is integrable on the infinite interval $(-\infty, \infty)$ when $a > 1$.

(iv) Express $\hat{f}_k(\xi)$ in terms of $\hat{f}_0(\xi)$ when $a > 1$.

(v) Show that $\hat{f}_k(\xi)$ is of class $C^{k+\ell}$ when $a > \ell + 1$ for a positive integer ℓ.

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple undirected graph with a vertex set V and an edge set E, and let each edge $e \in E$ be weighted by a real number $w(e)$. A cut-set of G is a minimal subset F of E such that $(V, E - F)$ is disconnected. Prove or disprove each of the following propositions in (i)-(iv), giving a proof or a counterexample.

(i) Let K be a cut-set in G, and let a be an edge in K which has the minimum weight. Then any minimum spanning tree of G contains edge a.

(ii) Let K be a cut-set in G, and let a be an edge in K which has the minimum weight. Then G has a minimum spanning tree which contains edge a.

(iii) Let K be a cut-set in G, and let b be an edge in K which has the maximum weight. Then G has a minimum spanning tree which does not contain edge b.

(iv) Let C be a cycle in G, and let a be an edge in C which has the minimum weight. Then G has a minimum spanning tree which contains edge a.

An English Translation:

Operations Research

3

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a twice continuously differentiable function, and let $\boldsymbol{a}$ be an n-dimensional nonzero vector.

Consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = 0, \end{array}$$

where the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector. Let $\boldsymbol{x}^*$ be a global optimal solution to problem P.

Moreover consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(k): & \text{Minimize} & f_k(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \leqq 1, \end{array}$$

where k is a nonnegative integer and $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the function defined by

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{k}{2}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).$$

Let $\boldsymbol{x}^k$ be a global optimal solution to problem P(k). Suppose that $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \bar{\boldsymbol{x}}$ and $\lim_{k\to\infty} k(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^k) = \bar{\lambda}$.

Answer the following questions.

(i) Show that $f_k(\boldsymbol{x}^k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*)$ for any nonnegative integer k.

(ii) Show that $\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}} = 0$ and $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$.

(iii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem P(k).

(iv) Show that $\nabla f_k(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0}$ for all k sufficiently large.

(v) Show that $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \bar{\lambda}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Let a linear dynamical system be given by the state equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^2$ is the state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is the control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is the observation output. Moreover, let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

where a is a real number. Answer the following questions.

(i) Determine the controllability and the observability of the system.

In what follows, let $a = 1$.

(ii) Obtain the state equation of a full state observer in such a way that the error dynamics has the eigenvalues $\{-1, -2\}$.

(iii) Let $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ be the state of the observer constructed in (ii), and define

$$u = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + v$$

to close the feedback loop, where $v(t) \in \mathbb{R}$ is an exogenous input. Calculate the eigenvalues of the closed loop system and obtain the transfer function from v to y.

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let X be a real-valued random variable over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ obeying the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma (> 0)$ whose density function is given by $\rho_\gamma(x) = \dfrac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}$. Answer the following questions.

(i) Show that a random variable Y given by the transformation $Y = \dfrac{1}{X}$ also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma' = \dfrac{1}{\gamma}$.

(ii) Show that a random variable Z given by the transformation $Z = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{X}\right)$ also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma'' = \dfrac{1}{2}\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)$.

(iii) Show that the probability density function $p_n(x)$ of a random variable $X_n (n \geq 0)$ given by the recursion relation $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n - \dfrac{1}{X_n}\right)$, $X_0 = X$ converges to the density function of the standard Cauchy distribution $\rho_1(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ as $n \to \infty$, for any $\gamma > 0$.

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Consider the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu^2,$$

which depends on the parameter $\mu > 0$. Let $\varphi_t(x_0; \mu)$ denote the solution satisfying the initial condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ at $t = 0$. Answer the following questions.

(i) Obtain the solution $\varphi_t(x_0; \mu)$.

(ii) Show that $y = \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial x_0}(x_0; \mu)$ is a solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(x_0; \mu) y$$

for any $\mu > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}$.

(iii) Obtain a solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(0; 1) y$$

satisfying the initial condition $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ at $t = 0$.

(iv) Obtain a solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = -2\varphi_t(0; 1) y + 2$$

satisfying the initial condition $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ at $t = 0$.