物理統計学

5

X を尺度母数 $\gamma(>0)$ のコーシー分布に従う無限区間 $(-\infty,\infty)$ 上の実数値確率変数とし，その確率密度関数は $\rho_\gamma(x)=\dfrac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}$ で与えられるものとする．以下の問いに答えよ．

(i) 変換 $Y=\dfrac{1}{X}$ で定義される確率変数 Y も，尺度母数 $\gamma'=\dfrac{1}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma'}(x)$ に従うことを示せ．

(ii) 変換 $Z=\dfrac{1}{2}\left(X-\dfrac{1}{X}\right)$ で定義される確率変数 Z も，尺度母数 $\gamma''=\dfrac{1}{2}\left(\gamma+\dfrac{1}{\gamma}\right)$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma''}(x)$ に従うことを示せ．

(iii) 漸化式 $X_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(X_n-\dfrac{1}{X_n}\right)$, $X_0=X$ で定まる確率変数 X_n の確率密度関数 $p_n(x)$ は，任意の $\gamma>0$ に対して，$n\to\infty$ の時，標準コーシー分布の確率密度関数 $\rho_1(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ に収束することを示せ．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let X be a real-valued random variable over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ obeying the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma(>0)$ whose density function is given by $\rho_\gamma(x) = \dfrac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}$. Answer the following questions.

(i) Show that a random variable Y given by the transformation $Y = \dfrac{1}{X}$ also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma' = \dfrac{1}{\gamma}$.

(ii) Show that a random variable Z given by the transformation $Z = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{X}\right)$ also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter $\gamma'' = \dfrac{1}{2}\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)$.

(iii) Show that the probability density function $p_n(x)$ of a random variable $X_n (n \geq 0)$ given by the recursion relation $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n - \dfrac{1}{X_n}\right), X_0 = X$ converges to the density function of the standard Cauchy distribution $\rho_1(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ as $n \to \infty$, for any $\gamma > 0$.