オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ を $n \times n$ の正定値対称行列とする．さらに，関数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= -\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\
g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z} \\
h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

ただし，$^\top$ は転置記号である．

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ をパラメータにもつ次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P1}(\boldsymbol{z}): \quad & \text{Maximize} \quad f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
& \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1 \\[1ex]
\mathrm{P2}(\boldsymbol{z}): \quad & \text{Minimize} \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
& \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\[1ex]
\mathrm{P3}(\boldsymbol{z}): \quad & \text{Minimize} \quad h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
& \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ と $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ である．

任意のパラメータ $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解をもつ．$\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$，$\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の最適解をそれぞれ $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z})$，$(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{z} \leqq 4$ とする．カルーシュ・キューン・タッカー（Karush-Kuhn-Tucker）条件を用いて $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ の最適解 $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$ を求めよ．($\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ が最大化問題であることに注意すること．)

(ii) カルーシュ・キューン・タッカー条件を用いて $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ の最適解 $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ を求めよ．

(iii) 次の命題について，真であれば証明をし，偽であれば反例を与えよ．

(a) 関数 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $p(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ としたとき，関数 p は凸関数である．

(b) 関数 $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $q(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ としたとき，関数 q は凸関数である．

(c) 関数 $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $r(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ としたとき，関数 r は凸関数である．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ be an $n \times n$ symmetric positive definite matrix. Moreover, let functions $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= -\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}, \\ h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

respectively. Here $^\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problems with a parameter $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{llll} \mathrm{P1}(\boldsymbol{z}): & \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathrm{P2}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P3}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ are $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, respectively.

For any parameter vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, problems $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ have unique solutions. Let $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z})$ and $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ be the solutions of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$, $\mathrm{P2}(\boldsymbol{z})$ and $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$, respectively.

Answer the following questions.

(i) Suppose that $\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqq 4$. Obtain the solution $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z})$ of $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$. (Note that $\mathrm{P1}(\boldsymbol{z})$ is a maximization problem.)

(ii) Obtain the solution $(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$ of $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for $\mathrm{P3}(\boldsymbol{z})$.

(iii) Prove or disprove the following propositions, giving a proof or a counterexample.

(a) Let $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $p(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$. Then p is a convex function.

(b) Let $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $q(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$. Then q is a convex function.

(c) Let $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by $r(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{x}^3(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}^3(\boldsymbol{z}))$. Then r is a convex function.