基礎数学 I

$\boxed{1}$

以下の問いに答えよ．

(i) 2 項係数を ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ とかく．2 項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n$$

を用いて，$x > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

であることを示せ．

さらに，$0 < x < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

であることを示せ．

(ii) $x_0 \neq 0$ とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が点 $x = x_0$ で収束すれば，$|x| < |x_0|$ なるすべての実数 x についてこの級数は収束することを示せ．

さらに，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

が収束するような実数 x の範囲を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Answer the following questions.

(i) Let ${}_mC_n$ be the binomial coefficients ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$. Using the binomial theorem

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n,$$

show that

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

for $x > 1$.

Next show that

$$\lim_{n\to\infty} n x^n = 0$$

for $0 < x < 1$.

(ii) Let $x_0 \neq 0$. Show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converges for any real number x such that $|x| < |x_0|$, if the power series converges at the point $x = x_0$.

Next find the domain of the real number x such that the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

converges.