

線形計画

3

A を $m \times n$ 行列, b を m 次元ベクトルとする. $Az = b$ をみたす n 次元ベクトル z が存在するとする. このとき, 次の線形計画問題 (P) を考える.

$$\begin{aligned} \text{(P) Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & y_i \geq x_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ & y_i \geq -x_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ただし, 決定変数は $x, y \in \mathbb{R}^n$ である.

以下の問いに答えよ.

- (i) 問題 (P) の双対問題を書け.
- (ii) 問題 (P) が最適解を持つことを示せ.
- (iii) $m = 2, n = 3$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 問題 (P) の最適解を求めよ.

An English Translation:

Linear Programming

3

Let \mathbf{A} be an $m \times n$ matrix, and let \mathbf{b} be an m dimensional vector. Suppose that there exists an n dimensional vector \mathbf{z} such that $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$.

Consider the following linear programming problem (P):

$$\begin{aligned} \text{(P) Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & y_i \geq x_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ & y_i \geq -x_i \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

where the decision variables are $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions.

- (i) Write out a dual problem of problem (P).
- (ii) Show that problem (P) has an optimal solution.
- (iii) Let $m = 2, n = 3$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Obtain an optimal solution of problem (P).