現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^{\top}u(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力であり，$^{\top}$ は転置をあらわす．以下の問いに答えよ．

(i) システムの可観測性の定義を述べよ．

(ii) システムが可観測かつ A のすべての固有値の実部が負ならば

$$PA + A^{\top}P + C^{\top}C = 0$$

を満たす正定値行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在することを証明せよ．

(iii) k はある正の整数とし，$n = 2k+1$ とする．また，A の (i,j)-要素 $(A)_{ij}$ および C の i 番目の要素 $(C)_i$ は

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

で与えられるとする．このとき，システムの可観測性を判定せよ．さらに，システムの最小実現の次元数を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^\top u(t),\ y(t) = Cx(t),$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output, and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of the observability of the system.

(ii) Show that if the system is observable and the real parts of all the eigenvalues of A are negative, then there exists a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ that satisfies

$$PA + A^\top P + C^\top C = 0.$$

(iii) Let k be a positive integer, and $n = 2k+1$. The (i,j)-entry $(A)_{ij}$ of A, and the i-th entry $(C)_i$ of C are given by

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Then, determine the observability of the system. Furthermore, find the dimension of a minimal realization of the system.