基礎数学 I

1

n を正の整数とする．実数 $\beta_{k,n}$ および n 次多項式

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

を用いて，高々 n 次の多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 次の恒等式が成り立つことを示せ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x)$

(ii) $\delta > 0$ および $x \in (0, 1)$ に対して，

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

が成り立つことを示せ．ここで和の記号は，$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$ を満たす全ての k に対する和を表す．

(iii) f を区間 $(0, 1)$ 上の連続な実数値有界関数とし，$\beta_{k,n} = f(k/n)$ によって多項式列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正の整数 N で

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0, 1))$$

を満たすものが存在することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let n be a positive integer. We introduce a polynomial of degree at most n by

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x),$$

where $\beta_{k,n} \in \mathbb{R}$ and the polynomial of degree n,

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k},$$

for $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Answer the following questions.

(i) Prove the following identities:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx,$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x).$

(ii) Show that

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

for $\delta > 0$ and $x \in (0,1)$, where the summation symbol denotes the sum over k satisfying $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$.

(iii) Let f be a continuous real-valued bounded function on the interval $(0,1)$. By $\beta_{k,n} = f(k/n)$, we define the polynomial sequence $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Show that for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer N such that

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0,1)).$$

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，G は隣接リストにより貯えられているとする．二点 $u,v\in V$ 間の路の最短の長さを $\mathrm{dist}(u,v)$ と記す．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の点 $s\in V$ を選ぶ．$\mathrm{dist}(s,u)=\mathrm{dist}(s,v)$ を満たす枝 $uv\in E$ が存在すれば，枝 uv は長さ奇数の単純閉路に含まれることを証明せよ．

(ii) G が二部グラフであるかどうかを $O(|V|+|E|)$ 時間で判定する方法を示せ．

(iii) 異なる二点 $s,t\in V$ に対して，s,t 間の最短路が唯一であるかどうかを $O(|V|+|E|)$ 時間で判定する方法を示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E. Assume that G is stored in adjacency lists. For two vertices $u, v \in V$, let $\mathrm{dist}(u, v)$ denote the shortest length of a path between them. Answer the following questions.

(i) Let $s \in V$ be an arbitrary vertex. Prove that if there is an edge $uv \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, u) = \mathrm{dist}(s, v)$ then edge uv is contained in a simple cycle of an odd length.

(ii) Show how to test whether G is a bipartite graph or not in $O(|V| + |E|)$ time.

(iii) Let $s, t \in V$ be two distinct vertices. Show how to test whether G has only one shortest path between s and t or not in $O(|V| + |E|)$ time.

線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と $\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトル，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ を n 次元ベクトルする．ただし $^\top$ は転置記号を表す．さらに，$\boldsymbol{A}$ を第 i 列が $\boldsymbol{a}^i$ となる $m \times n$ 行列，つまり $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$ とする．

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える．

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c} \\ & & \end{array}$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，(D) の決定変数は $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ である．

問題 (P) は $x_1^* = 0$ となる唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top$ を持つとする．このとき，次の線形計画問題 (Q) を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*) v \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\ & & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \ldots, n) \\ & & v \geqq 0 \end{array}$$

ただし，決定変数は $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ と $v \in \mathbb{R}$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (Q) の双対問題を書け．

(ii) 問題 (Q) が最適解を持つことを示せ．

(iii) 問題 (Q) の最適値が 0 となることを示せ．

(iv) 問題 (Q) は $v^* > 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．$\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$ とする．このとき，$\boldsymbol{w}^*$ は双対問題 (D) の最適解であることを示せ．

(v) 問題 (Q) は $v^* = 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．このとき，$(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$ となる (D) の最適解 $\boldsymbol{w}^*$ が存在することを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

3

Let $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ and $\boldsymbol{b}$ be m-dimensional vectors, and let $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ be an n-dimensional vector, where the superscript $^\top$ denotes transposition. Moreover, let $\boldsymbol{A}$ be an $m \times n$ matrix whose ith column is $\boldsymbol{a}^i$, that is, $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$.

Consider the following linear programming problem (P) and its dual problem (D):

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}, \end{array}$$

where the decision variables of (P) and (D) are $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, respectively.

Suppose that problem (P) has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top$ such that $x_1^* = 0$. Then consider the following linear programming problem (Q):

$$\begin{array}{lll} \text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*)v \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\ & & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \ldots, n) \\ & & v \geqq 0, \end{array}$$

where the decision variables are $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $v \in \mathbb{R}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem (Q).

(ii) Show that problem (Q) has an optimal solution.

(iii) Show that an optimal value of problem (Q) is 0.

(iv) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* > 0$. Let $\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$. Then show that $\boldsymbol{w}^*$ is an optimal solution to problem (D).

(v) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* = 0$. Then show that problem (D) has an optimal solution $\boldsymbol{w}^*$ such that $(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$.

線形制御理論

$\boxed{4}$

図 1 はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は PI 補償器，r は参照入力，e は偏差である．制御対象 $P(s)$ と補償器 $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{-s+2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts}$$

でそれぞれ与えられているとする．ただし $T > 0$ は積分時間である．以下の問いに答えよ．

(i) フィードバック制御系が安定となる T の集合を求めよ．

(ii) 参照入力を単位ランプ関数，すなわち $r(t) = t$ とする．$T > 0$ を変化させるとき，定常偏差の下限を求めよ．

(iii) $T = 1$ とする．ゲイン余裕と位相余裕をそれぞれ g_m, ϕ_m で表す．このとき g_m と $\tan\phi_m$ を計算せよ．

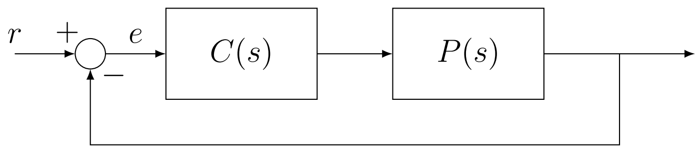

図 1 フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

4

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, $C(s)$ is a PI controller, r is a reference input, and e is an error. The plant $P(s)$ and the controller $C(s)$ are given by

$$P(s) = \frac{-s+2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts},$$

respectively, where $T > 0$ is the integration time. Answer the following questions.

(i) Find the set of T for which the feedback control system is stable.

(ii) Let the reference input be the unit ramp signal, that is, $r(t) = t$. Calculate the infimum of the steady state error when $T > 0$ varies.

(iii) Let $T = 1$. Denote the gain margin and the phase margin by g_m and ϕ_m, respectively. Calculate g_m and $\tan \phi_m$.

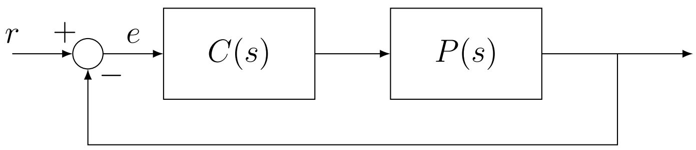

Figure 1 Feedback control system

基礎力学

5

ポテンシャル $V(r)=\dfrac{k}{r^n}\quad(k>0, n\geqq 1)$ をもつ中心力による質量 m の粒子の散乱を考える．ここで，力の中心から粒子までの距離を r とし，r の最小値を r_0，力の中心のまわりの角運動量の大きさを $h(>0)$ とし，無限遠方での粒子の速さを v_∞ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $r=r_0$ の時の粒子の速さ v_0 を求めよ．

(ii) 散乱角 Θ が

$$\Theta=\pi-2\int_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{u_0^2-u^2+\frac{2m}{h^2}[V(\frac{1}{u_0})-V(\frac{1}{u})]}}$$

で与えられることを示せ．但し，$u=\dfrac{1}{r}$, $u_0=\dfrac{1}{r_0}$ とする．

(iii) ポテンシャルが $V(r)=\dfrac{k}{r}\quad(k>0)$ で与えられる場合の散乱の微分断面積を導出せよ．

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Let us consider a particle of mass m scattering under the action of a central force by a potential $V(r) = \dfrac{k}{r^n}$ $(k > 0, n \geqq 1)$ where r denotes the distance between the particle and the center of the central force. Let r_0 be the minimal value of r, $h(> 0)$ be the magnitude of the angular moment around the center of the central force and v_∞ be the speed of the particle at $r = \infty$. Answer the following questions.

(i) Obtain the speed v_0 of the particle at $r = r_0$.

(ii) Show that the scattering angle Θ is given by

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2 + \frac{2m}{h^2}[V(\frac{1}{u_0}) - V(\frac{1}{u})]}}$$

where $u = \dfrac{1}{r}$ and $u_0 = \dfrac{1}{r_0}$.

(iii) Derive the scattering differential cross section in the case that $V(r) = \dfrac{k}{r}$ where k is a positive constant.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

以下の問いに答えよ．

(i) 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

のランク（階数）r を求め，$\mathrm{rank}\, B = r$ なる適当な $4 \times r$ 行列 B，$\mathrm{rank}\, C = r$ なる $r \times 4$ 行列 C への分解 $A = BC$ を計算せよ．

(ii) n 本の m 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ からなる $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

のランク r は $r < \min\{m, n\}$ であるものとする．このとき，行列 A は，$\mathrm{rank}\, B = r$ なる適当な $m \times r$ 行列 B，$\mathrm{rank}\, C = r$ なる $r \times n$ 行列 C を用いて

$$A = BC$$

と分解されることを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Answer the following questions.

(i) Find the rank r of the 4×4 matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

and a decomposition of A into a product $A = BC$, where B is a suitable $4 \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times 4$ matrix of rank r.

(ii) Let $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ be n column vectors of dimension m and let the $m \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

be of rank r with $r < \min\{m, n\}$. Show that the matrix A can be decomposed into a product

$$A = BC,$$

where B is a suitable $m \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times n$ matrix of rank r.

応用数学

$\boxed{1}$

i を虚数単位とする．$f(z)$ を，K 個の整数ではない複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ を除いて正則な複素関数とする．$k = 1, \ldots, K$ に対して，a_k は $f(z)$ の一位の極で，その留数を A_k とし，$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ とする．$N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$ を満たす自然数 N に対し，Γ_N を $N+\frac{1}{2}+Ni, -N-\frac{1}{2}+Ni, -N-\frac{1}{2}-Ni, N+\frac{1}{2}-Ni$ をこの順に結んでできる長方形の経路とする．以下の問いに答えよ．

(i) N によらない実数 M が存在して，Γ_N 上の z に対して，

$$|\cot \pi z| < M$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$ である．

(ii) 次式を示せ．

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) 次式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) c を 0 でない実数とする．次式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c}+e^{-\pi c}}{e^{\pi c}-e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let i be the imaginary unit. Let $f(z)$ be a complex function which is holomorphic except at K non-integer, complex numbers $a_1, a_2, \ldots, a_K$. Assume that a_k is a pole of order one and the residue of $f(z)$ at a_k is A_k for $k = 1, \ldots, K$. Assume that $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. For a positive integer N satisfying $N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$, let Γ_N be the rectangular path connecting $N + \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} - Ni$ and $N + \frac{1}{2} - Ni$ in this order. Answer the following questions.

(i) Show that there is a real number M independent of N such that

$$|\cot \pi z| < M$$

holds for any z on Γ_N. Here $\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$.

(ii) Show that

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) Show that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) Let c be a non-zero real number. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が与えられているとする．G の全域木 $T \subseteqq E$ に対して，補木の枝 $a \in E \setminus T$ を含む T の基本閉路を $C_T(a)$，木の枝 $b \in T$ を含む T の基本カットセットを $K_T(b)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(i) G の全域木 $T \subseteqq E$ が最小木であるとき，次の条件 (C) が成り立つことを証明せよ．
条件 (C): 補木の任意の枝 $a \in E \setminus T$ とその基本閉路の各枝 $b \in C_T(a)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(ii) 条件 (C) を満たす任意の全域木 T は次の条件 (K) を満たすことを証明せよ．

条件 (K): 全域木 T の任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセットの各枝 $a \in K_T(b)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(iii) G の全域木 $T \subseteqq E$ に対して条件 (K) が成り立つとき，T は最小木であることを証明せよ．

(iv) 次の命題が真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．
「G が最小木を二つ持つとき，G には同じ重みを持つ枝が少なくとも 2 本存在する．」

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a spanning tree $T \subseteqq E$ of G, let $C_T(a)$ denote the fundamental cycle containing an edge $a \in E \setminus T$, and $K_T(b)$ denote the fundamental cut-set containing an edge $b \in T$. Answer the following questions.

(i) Prove that every minimum spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfies the next condition (C).

(C): For every edge $a \in E \setminus T$, each edge $b \in C_T(a)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(ii) Prove that any spanning tree T satisfying condition (C) also satisfies the next condition (K).

(K): For every edge $b \in T$, each edge $a \in K_T(b)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(iii) Prove that any spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfying condition (K) is a minimum spanning tree.

(iv) Prove or disprove the next proposition, giving a proof or a counterexample.
"When G has two minimum spanning trees, some two edges in G have the same weight."

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) 次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} \qquad & \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X
\end{array}
$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\theta \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ は以下のように定義された目的関数と実行可能領域である．

$$
\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}, \qquad X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n) \right\}
$$

問題 (P) は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を持ち，関数 θ は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で凹関数 (すなわち，$-\theta$ は凸関数) であることが知られている．ただし，$\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．以下の (a)，(b)，(c) に答えよ．

(a) 問題 (P) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．(問題 (P) が最大化問題であることに注意すること．)

(b) 問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ．

(c) $\gamma_i \in \mathbb{R}$，$\gamma_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n)$ とする．問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を利用して，以下の算術幾何平均の不等式が成り立つことを示せ．

$$
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i \right)^{1/n}
$$

(ii) 正の整数 n に対して，$\mathcal{F}_n$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への非負の凸関数の集合とする．以下の (A)，(B) に答えよ．

(A) $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $g_f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，任意の $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して，g_f が凸関数であることを示せ．

(B) 正の数 $\alpha \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $h_{f,\alpha} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^{\alpha}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，すべての $\alpha \geqq \alpha^*$ と $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して，$h_{f,\alpha}$ が凸関数であるような最小な $\alpha^* \in \mathbb{R}$ を求めよ．その際，α^* が最小であることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following nonlinear programming problem:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X, \end{array}$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, the objective function $\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and the feasible set $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ are defined by

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \quad \text{and} \quad X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n)\right\},$$

respectively. It is known that the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P) is unique, and that the function θ is concave (that is, $-\theta$ is convex) on $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\,(i = 1, \ldots, n)\}$. Answer the following questions (a), (b) and (c).

(a) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P). (Note that (P) is a maximization problem.)

(b) Obtain the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P).

(c) By using the solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P), show that for all $\gamma_i \in \mathbb{R}$ with $\gamma_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, the inequality of arithmetic and geometric means holds, that is,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right)^{1/n}.$$

(ii) Let n be a positive integer number and $\mathcal{F}_n$ be the set of all convex and nonnegative functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$. Answer the following questions (A) and (B).

(A) For a given function $f \in \mathcal{F}_n$, define $g_f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Prove that g_f is convex for all $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.

(B) For a given positive number $\alpha \in \mathbb{R}$ and a function $f \in \mathcal{F}_n$, define $h_{f,\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^\alpha$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Obtain the minimum value of $\alpha^* \in \mathbb{R}$ such that $h_{f,\alpha}$ is convex for all $\alpha \geqq \alpha^*$ and $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Justify your answer.

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし， $x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし，$\mathbb{R}^3$ の二つの線形部分空間を

$$\mathcal{O} = \{x_0 : \text{任意の}\ t\ \text{に対して}\ u(t) = 0\ \text{ならば，任意の}\ t\ \text{に対して}\ y(t) = 0\}$$

および

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}$$

により定義する. 以下の問いに理由とともに答えよ.

(i) $\mathcal{O}$ の基底および $\mathcal{C}$ の基底をそれぞれ一つ求めよ.

(ii) 線形独立なベクトルの組 $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ で $e_1 \in \mathcal{O}$ かつ $e_2 \in \mathcal{C}$ を満たすものを一つ求めよ．また， $T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ に対して，$Tz(t) = x(t)$ で与えられる $z(t)$ を状態変数としてもつ座標変換された状態方程式を求めよ.

(iii) $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して，

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt$$

を最小化する $u(t)$ を求めよ.

An English Translation:

Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Define two linear subspaces of $\mathbb{R}^3$ by

$$\mathcal{O} = \{x_0 : y(t) = 0 \text{ for all } t \text{ if } u(t) = 0 \text{ for all } t\}$$

and

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Obtain a basis of $\mathcal{O}$ and a basis of $\mathcal{C}$.

(ii) Find a triplet of linearly independent vectors $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ such that $e_1 \in \mathcal{O}$ and $e_2 \in \mathcal{C}$. Then, obtain the coordinate transformed state equation having the state vector $z(t)$ such that $Tz(t) = x(t)$ with $T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(iii) For $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, find $u(t)$ that minimizes

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt.$$

物理統計学

5

時系列 $X_0, X_1, \ldots$ は区間 $(-1,1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度とするエルゴード的な力学系 $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ により決定されるものとする．さらに

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の観測関数 $B(x)$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

が成立するものとする．但し，$X_i \in (-1,1) \quad (i \geqq 0)$ である．$\langle B \rangle$ は初期値 $X_0 = \cos(\theta_0)$ が不変測度 $\mu(dx)$ に従って分布する時の積分 $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(i) $B(x) = x$ の時，$\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(ii) $B(x) = 2x^2 - 1$ の時，$\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(iii) $B(x) = (2x^2 - 1)x$ の時，$\langle B \rangle = 0$ であることを示せ．

(iv) X_n の一般解を与えよ．

(v) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ の時，$\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ．

(vi) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ に対して，1 次元ランダムウォークを

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

で構成した時，その拡散係数 $D \equiv \lim_{N\to\infty} \dfrac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$ を求めよ．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let a time series $X_0, X_1, \dots$ be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ with a probability measure $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1, 1)$ being the invariant measure and assume that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty,$$

where $X_i \in (-1, 1) \quad (i \geqq 0)$. $\langle B \rangle$ is defined as the integral $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ with an initial condition $X_0 = \cos(\theta_0)$ being distributed according to the invariant measure $\mu(dx)$. Answer the following questions:

(i) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = x$.

(ii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = 2x^2 - 1$.

(iii) Show that $\langle B \rangle = 0$ for $B(x) = (2x^2 - 1)x$.

(iv) Give a general solution X_n.

(v) Show that $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$.

(vi) Let us construct a one-dimensional random walk defined by

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \dots$$

for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$. Obtain the diffusion coefficient $D \equiv \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$.

力学系数学

$\boxed{6}$

$a, b \in \mathbb{R}$ を定数として次の実微分方程式を考える．

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

X を t の有理関数，式 (1) の解およびそれらの高階導関数の有理式全体からなる集合とする．特に，X は式 (1) の任意の解の 2 階導関数を含む．次の条件を満たす全単射写像 $\sigma : X \to X$ 全体の集合を G で表す．

(A1) 任意の $f, g \in X$ に対して $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ および $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$ が成立

(A2) 任意の有理関数 f に対して $\sigma(f) = f$ が成立

(A3) 任意の $f \in X$ に対して $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$ が成立

$x = e^t$ が式 (1) の解であるとき，以下の問いに答えよ．

(i) 定数 a, b を定めよ．

(ii) $x = e^t$ と 1 次独立な解 $x = \phi(t)$ を一つ求めよ．

(iii) $x(t)$ が解のとき $\sigma(x(t))$ も解であることを示せ．

(iv) $\phi(t)$ を (ii) で求めた解とする．(iii) により，任意の $\sigma \in G$ に対して，ある定数 $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ が存在して

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t)$$

が成立する．各 $i, j = 1, 2$ に対して (i, j) 成分が $a_{ij}(\sigma)$ の 2 次正方行列を $A(\sigma)$ と表す．このとき，任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ に対して $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ が成立することを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a, b \in \mathbb{R}$ be constants and consider the real differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{1}$$

Let X be the set of all rational expressions of rational functions of t, solutions to equation (1) and their derivatives of any order. In particular, X contains the second-order derivative of any solution to equation (1). Let $\sigma : X \to X$ be a bijective map satisfying the following conditions:

(A1) For any $f, g \in X$, $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ and $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$;

(A2) For any rational function f, $\sigma(f) = f$;

(A3) For any $f \in X$, $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$.

Let G denote the set of all such maps. Assume that $x = e^t$ is a solution to equation (1). Answer the following questions.

(i) Determine the constants a and b.

(ii) Obtain a solution $x = \phi(t)$ which is linearly independent of $x = e^t$.

(iii) Show that $\sigma(x(t))$ is a solution if $x(t)$ is so.

(iv) Let $\phi(t)$ be the solution obtained in (ii). From (iii) we see that for any $\sigma \in G$ there exist some constants $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ such that

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t).$$

Let $A(\sigma)$ be a 2×2 matrix whose (i, j)-element is $a_{ij}(\sigma)$ for $i, j = 1, 2$. Then show that $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ for any $\sigma_1, \sigma_2 \in G$.