グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が与えられているとする．G の全域木 $T \subsetneqq E$ に対して，補木の枝 $a \in E \setminus T$ を含む T の基本閉路を $C_T(a)$，木の枝 $b \in T$ を含む T の基本カットセットを $K_T(b)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(i) G の全域木 $T \subsetneqq E$ が最小木であるとき，次の条件 (C) が成り立つことを証明せよ．
条件 (C): 補木の任意の枝 $a \in E \setminus T$ とその基本閉路の各枝 $b \in C_T(a)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(ii) 条件 (C) を満たす任意の全域木 T は次の条件 (K) を満たすことを証明せよ．

条件 (K): 全域木 T の任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセットの各枝 $a \in K_T(b)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(iii) G の全域木 $T \subsetneqq E$ に対して条件 (K) が成り立つとき，T は最小木であることを証明せよ．

(iv) 次の命題が真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．
「G が最小木を二つ持つとき，G には同じ重みを持つ枝が少なくとも 2 本存在する．」

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a spanning tree $T \subseteqq E$ of G, let $C_T(a)$ denote the fundamental cycle containing an edge $a \in E \setminus T$, and $K_T(b)$ denote the fundamental cut-set containing an edge $b \in T$. Answer the following questions.

(i) Prove that every minimum spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfies the next condition (C).

(C): For every edge $a \in E \setminus T$, each edge $b \in C_T(a)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(ii) Prove that any spanning tree T satisfying condition (C) also satisfies the next condition (K).

(K): For every edge $b \in T$, each edge $a \in K_T(b)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(iii) Prove that any spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfying condition (K) is a minimum spanning tree.

(iv) Prove or disprove the next proposition, giving a proof or a counterexample.
"When G has two minimum spanning trees, some two edges in G have the same weight."