オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) 次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} \qquad & \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ は以下のように定義された目的関数と実行可能領域である．

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}, \qquad X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0 \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

問題 (P) は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を持ち，関数 θ は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で凹関数 (すなわち，$-\theta$ は凸関数) であることが知られている．ただし，$\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．以下の (a)，(b)，(c) に答えよ．

(a) 問題 (P) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．(問題 (P) が最大化問題であることに注意すること．)

(b) 問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ．

(c) $\gamma_i \in \mathbb{R}$，$\gamma_i \geqq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ とする．問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を利用して，以下の算術幾何平均の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i \right)^{1/n}$$

(ii) 正の整数 n に対して，$\mathcal{F}_n$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への非負の凸関数の集合とする．以下の (A)，(B) に答えよ．

(A) $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $g_f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，任意の $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して，g_f が凸関数であることを示せ．

(B) 正の数 $\alpha \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $h_{f,\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^{\alpha}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，すべての $\alpha \geqq \alpha^*$ と $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して，$h_{f,\alpha}$ が凸関数であるような最小な $\alpha^* \in \mathbb{R}$ を求めよ．その際，α^* が最小であることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following nonlinear programming problem:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X, \end{array}$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, the objective function $\theta \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and the feasible set $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ are defined by

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \quad \text{and} \quad X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n) \right\},$$

respectively. It is known that the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P) is unique, and that the function θ is concave (that is, $-\theta$ is convex) on $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\,(i = 1, \ldots, n)\}$. Answer the following questions (a), (b) and (c).

(a) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P). (Note that (P) is a maximization problem.)

(b) Obtain the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P).

(c) By using the solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P), show that for all $\gamma_i \in \mathbb{R}$ with $\gamma_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, the inequality of arithmetic and geometric means holds, that is,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i \right)^{1/n}.$$

(ii) Let n be a positive integer number and $\mathcal{F}_n$ be the set of all convex and nonnegative functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$. Answer the following questions (A) and (B).

(A) For a given function $f \in \mathcal{F}_n$, define $g_f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Prove that g_f is convex for all $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.

(B) For a given positive number $\alpha \in \mathbb{R}$ and a function $f \in \mathcal{F}_n$, define $h_{f,\alpha} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^{\alpha}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Obtain the minimum value of $\alpha^* \in \mathbb{R}$ such that $h_{f,\alpha}$ is convex for all $\alpha \geqq \alpha^*$ and $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Justify your answer.