線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を $m \times n$ 行列とする．さらに $\boldsymbol{A}$ の第 (i,j) 成分を $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ とする．

　以下のパラメータ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ とパラメータ $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(\boldsymbol{u}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\
& & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{Q}(\boldsymbol{v}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\
& & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし，$\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ の決定変数は $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ である．また，$^\top$ は転置記号を表す．

　問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ のすべての最適解の集合を $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ とし，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ のすべての最適解の集合を $S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{v})$ とする．さらに，$X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{x}^*)\}$ とする．

　以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の双対問題を書け．

(ii) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ を $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ であるベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{0} \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ とする．このとき，すべての $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$ に対して $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = 0$ となることを示せ．

(iv) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ を $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるベクトルとする．このとき，$S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ を求めよ．

(v) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ とする．このとき，X を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be $m \times n$ matrices. Suppose that the (i, j)th entry of $\boldsymbol{A}$ is given by $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$.

Consider the following linear programming problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ with vectors of parameters $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, respectively.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{u}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{v}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ are $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, respectively. Here the superscript $^\top$ denotes transposition.

Let $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ and $S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{v})$ denote the sets of all optimal solutions of problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$, respectively. Moreover, let $X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{x}^*)\}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$.

(ii) Let $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ be a vector such that $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Show that $\boldsymbol{0} \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(iii) Suppose that $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$. Then show that $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = 0$ for all $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$.

(iv) Let $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ be a vector such that $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ and $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Obtain $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(v) Suppose that $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Obtain X.