基礎数学II

6

A を次に定める $n \times n$ 行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また， $p(x)$ を次に定める x の多項式とする．

$$p(x) = \det(xI_n - A)$$

ここで，I_n は n 次単位行列を表す．$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，$n \times n$ 行列 A_k をブロック対角行列

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$0_{\ell,m}$ は $\ell \times m$ 零行列，C_k は 2×2 行列

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を表す．$n \times n$ 行列 A_n を対角行列 $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) 多項式 $p(x)$ を，定数 a と非負整数 r による ax^r の形の項の和によって表わせ．

(ii) $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$ が成り立つことを示せ．

(iii) $|j-k| > 1$ において，$A_k A_j = A_j A_k$ が成り立つことを示せ．

(iv) n を奇数とする．このとき，

$$p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n \, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$$

が成り立つことを示せ．

(v) n を奇数とする．$p(x) = 0$ の根は，$n \times n$ の対称三重対角行列で定まる方程式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0$$

の根と一致することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let A be an $n \times n$ matrix defined as

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and let $p(x)$ be a polynomial in x defined as $p(x) = \det(xI_n - A)$, where I_n is the identity matrix of order n. For $k = 1, 2, \ldots, n-1$, let us define the $n \times n$ matrix A_k by the block diagonal matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix},$$

where $0_{\ell,m}$ is the $\ell \times m$ zero matrix and C_k is the 2×2 matrix

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Define the $n \times n$ matrix A_n by the diagonal matrix $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$.

Answer the following questions.

(i) Express the polynomial $p(x)$ as a sum of terms of the form ax^r, where a is a constant and r is a non-negative integer.

(ii) Show that $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$.

(iii) Show that $A_k A_j = A_j A_k$ for $|j - k| > 1$.

(iv) Let n be an odd integer. Show that $p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n\, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$.

(v) Let n be an odd integer. Show that the roots of $p(x) = 0$ coincide with the roots of the equation

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0,$$

determined by an $n \times n$ symmetric tridiagonal matrix.