応用数学

$\boxed{1}$

i を虚数単位とする．$f(x)$ を実解析的関数で $f(x+2\pi)=f(x)$ を満たし，

$$D_\xi = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

を含む開集合まで解析接続できるとする．ここで，ξ は正の定数である．このとき，$f(x)$ はフーリエ級数展開可能で

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

が成り立つ．以下の問いに答えよ．

(i) 複素平面上の点 $0, 2\pi, 2\pi+i\xi, i\xi$ をこの順で結んでできる長方形の経路に沿った周回積分を考えることにより，任意の整数 k に対し，

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+i\xi) e^{-ikx} dx$$

を示せ．また，

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-i\xi) e^{-ikx} dx$$

を示せ．

(ii) $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$ とする．任意の整数 k に対し，$a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$ を示せ．

(iii) $c > 1$ を定数とし，

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}$$

とする．任意の正の実数 $\eta < \log(c + \sqrt{c^2-1})$ に対し，ある $M > 0$ が存在し，すべての整数 k に対し $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let i denote the imaginary unit. Let $f(x)$ be a real analytic function satisfying $f(x+2\pi) = f(x)$ and having an analytic continuation on an open set including

$$D_\xi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

where $\xi > 0$ is a constant. Then the Fourier series of $f(x)$ converges to $f(x)$ and

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Answer the following questions.

(i) Considering the contour integration along the rectangular path connecting the points $0, 2\pi, 2\pi + i\xi$ and $i\xi$ in this order on the complex plane, show that for any integer k,

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + i\xi)e^{-ikx}dx.$$

Moreover show that

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - i\xi)e^{-ikx}dx.$$

(ii) Let $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$. Show that for any integer k, $a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$.

(iii) Let $c > 1$ be a constant and let

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}.$$

Show that for any positive real number $\eta < \log(c + \sqrt{c^2 - 1})$, there is a constant $M > 0$ such that for all integer k, $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ holds.