Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成26年度4月期入学)

Admissions for April 2014

Entrance Examination for Master's Program

Department of Applied Mathematics and Physics

Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成25年8月5日(月) 13:00 – 15:00

August 5, 2013, 13:00 – 15:00

基礎科目
Basic Subjects

選択科目 (Choice of Subjects):

基礎数学I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学II

Basic Mathematics I, Date Structures and Algorithms, Linear Programming, Linear Control Theory, Basic Mechanics, Basic Mathematics II

注意 (NOTES)

1. 上記科目から2科目選択すること。
   3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ.

(i) 不等式

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

を示せ.

(ii) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$$

を求めよ.

(iii) $a, b > 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$$

を示せ.

(iv) $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0 \ \ (k \geqq 3)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

を示せ.

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Answer the following questions.

(i) Show the inequality

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(ii) Compute the limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}.$$

(iii) Show that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$$

for $a, b > 0$.

(iv) Show that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

for $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0 \ \ (k \geqq 3)$.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

配列 A に n 個の整数が貯えられている．以下の問いに答えよ．

(i) A の要素を $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ となるように整列するマージソート (Merge Sort) を与えよ．これの最悪計算時間を示し，理由も述べよ．

(ii) A の要素がすでに $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ となるように整列されているとする．このとき，$A[i] + 2A[j] = A[i] + 3A[k] = 0$ を満たす i, j, k $(1 \leqq i, j, k \leqq n)$ が存在するかどうかを $O(n)$ 時間で判定するアルゴリズムを示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Given an array A of n integers, answer the following questions.

(i) Show a Merge Sort algorithm that sorts the elements in A in such a way that $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ after sorting. Evaluate its worst-case running time.

(ii) Assume that the elements in A are already sorted so that $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ holds. Show an $O(n)$-time algorithm that determines whether or not there exist indices i, j and k $(1 \leqq i, j, k \leqq n)$ such that $A[i] + 2A[j] = A[i] + 3A[k] = 0$.

線形計画

3

次の線形計画問題Pを考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}: & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．さらに，問題 (P) に関連して，非負パラメータ μ を含む次の条件 $\mathrm{Q}(\mu)$ を考える．

$$
\mathrm{Q}(\mu):\ \begin{cases}
\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
x_i z_i = \mu \ (i = 1, \ldots, n) \\
\boldsymbol{x} \geqq 0,\ \boldsymbol{z} \geqq 0
\end{cases}
$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ である．各 μ に対して，条件 $\mathrm{Q}(\mu)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は唯一存在すると仮定し，それらを $\boldsymbol{x}(\mu)$, $\boldsymbol{y}(\mu)$, $\boldsymbol{z}(\mu)$ と表す．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題Pの双対問題をかけ．

(ii) 関数 $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $h(\mu) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\mu) - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}(\mu)$ と定義する．関数 h は $[0, \infty)$ 上で線形関数となることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x}(0)$ は問題Pの最適解となることを示せ．

(iv) $n = 2, m = 1$ とし，

$$
\boldsymbol{A} = (1\ \ 1),\quad \boldsymbol{b} = 1,\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

とする．このとき，任意の非負パラメータ μ に対して，条件 $\mathrm{Q}(\mu)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は唯一存在する．$\boldsymbol{x}(\mu)$ を求めよ．さらに，問 (i) で与えた双対問題の最適解を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

3

Consider the following linear programming:

$$\text{P}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $m \times n$ matrix of constants, $\boldsymbol{b}$ is an m-dimensional vector of constants, $\boldsymbol{c}$ is an n-dimensional vector of constants, $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, and the superscript $^\top$ denotes transposition. Moreover, consider the following conditions $\mathrm{Q}(\mu)$ with a nonnegative parameter μ:

$$\mathrm{Q}(\mu): \quad \begin{cases} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ x_i z_i = \mu \ (i = 1, \ldots, n) \\ \boldsymbol{x} \geqq 0, \ \boldsymbol{z} \geqq 0, \end{cases}$$

where $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Suppose that, for each μ, there exist unique vectors $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{z}$ that satisfy conditions $\mathrm{Q}(\mu)$. Let $\boldsymbol{x}(\mu)$, $\boldsymbol{y}(\mu)$ and $\boldsymbol{z}(\mu)$ be these unique vectors for each μ.

Answer the following questions.

(i) Write a dual problem of problem P.

(ii) Let a function $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be defined by $h(\mu) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\mu) - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}(\mu)$. Then show that the function h is linear on $[0, \infty)$.

(iii) Show that $\boldsymbol{x}(0)$ is an optimal solution to problem P.

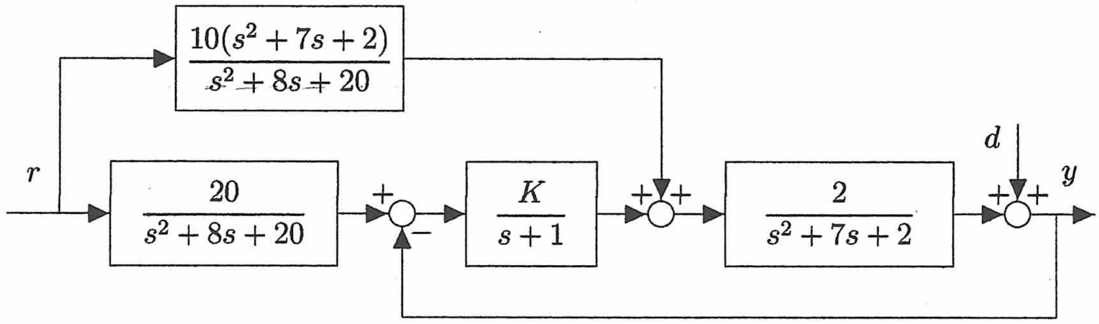
(iv) Let $n = 2, m = 1$, $\boldsymbol{A} = (1 \ \ 1)$, $\boldsymbol{b} = 1$ and

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Then, for each nonnegative μ, there exist unique vectors $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{z}$ that satisfy conditions $\mathrm{Q}(\mu)$. Obtain $\boldsymbol{x}(\mu)$. Moreover, obtain an optimal solution of the dual problem given in question (i).

線形制御理論

4



図：制御系

図1のブロック線図で表わされる制御系を考える．ただし，r は参照入力，y は出力，d は外乱であり，$K>0$ はフィードバックゲインである．このとき以下の問いに答えよ．

(i) 参照入力 r から出力 y への伝達関数を求めよ．またそのステップ応答を計算せよ．

(ii) この制御系が安定であるためのフィードバックゲイン K の範囲を求めよ．

(iii) $K=5$ であるときのゲイン交差周波数は，$\omega_{gc}=1$ で与えられることを示せ．またゲイン余裕を m_g，位相余裕を m_p とするとき，m_g ならびに $\tan m_p$ を求めよ．ただし常用対数を用いてもよい．

(iv) 外乱の影響をおさえるために，外乱 d から出力 y への伝達関数 $G(s)$ のゲイン $|G(j\omega)|$ を以下の要求を満たすようにしたい．(a) 角周波数 $\omega=0$ において，$|G(0)|<\frac{1}{8}$ である．(b) 角周波数帯 $0\leqq\omega\leqq 1$ において $|G(j\omega)|<\frac{1}{4}$ を満たす．以上の要求を満たすフィードバックゲイン K の範囲を求めよ．

An English translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

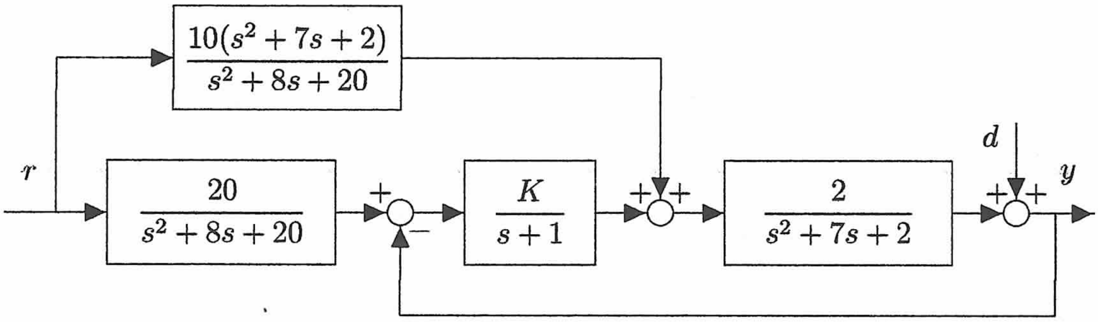


Figure: Control system

A control system is given by the block diagram shown in Figure, where r is the reference signal, y is the output, d is the disturbance, and $K > 0$ is a feedback gain. Answer the following questions.

(i) Calculate the transfer function from the reference input r to the output y. Compute the step response.

(ii) Find all the feedback gain K for which the control system is stable.

(iii) Let $K = 5$. Show that the gain cross frequency satisfies $\omega_{gc} = 1$. Let m_g and m_p be defined as the gain margin and the phase margin, respectively. Compute m_g and $\tan m_p$. Use common logarithm, if necessary.

(iv) The gain $|G(j\omega)|$ of the transfer function $G(s)$ from the disturbance d to the output y should satisfy the following requirements to reject the disturbance: (a) At the angular frequency $\omega = 0$, $|G(0)| < \frac{1}{8}$, and (b) $|G(j\omega)| < \frac{1}{4}$ for the angular frequency band $0 \leqq \omega \leqq 1$. Find all the feedback gain K satisfying the requirements.

基礎力学

$\boxed{5}$

任意の正実数λについて, 次式

$$U(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n U(x_1, x_2, x_3)$$

がデカルト座標の任意の点(x_1, x_2, x_3)で成立するn次の同次関数ポテンシャルUか, または

$$V(r) = g\frac{e^{-\kappa r}}{r^s} \quad (g > 0, \kappa \geqq 0, s > 0)$$

で与えられるポテンシャルVを受ける質量mの質点の運動を考える. ただし, ここでは質点の座標(x_1, x_2, x_3)と速度は常に位相空間上で有界であると仮定し, 運動エネルギーをT, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, 及び関数$G(t)$の時間平均$\langle G \rangle$を$\langle G \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t G(t)dt$と定義する. 以下の問いに答えよ.

(i) 同次関数ポテンシャルUを受ける運動に対して, 次の等式が成立することを示せ.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(mr^2) = 2T - nU.$$

(ii) 同次関数ポテンシャルUを受ける運動に対して, 次の等式が成立することを示せ.

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2}\langle U \rangle.$$

(iii) 同次関数ポテンシャルUを受ける運動の全エネルギー$T + U$を与えるハミルトニアン関数をHとする. $\langle T \rangle = |\langle H \rangle| > 0$が成立するときの同次関数ポテンシャル$U$の次数$n$を求めよ.

(iv) ポテンシャルVを受ける運動のハミルトニアン関数$H = T + V$について, 次の関係が成立することを示せ.

$$\frac{2-s}{2}\langle V \rangle - \frac{\kappa}{2}\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}\langle V^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leqq \langle H \rangle \leqq \frac{2-s}{2}\langle V \rangle.$$

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

Consider a motion of a mass point with the mass m affected either by the potential U given by the n-th order homogeneous function such that for any positive real number λ the relation

$$U(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n U(x_1, x_2, x_3)$$

holds for any positions (x_1, x_2, x_3) of the Cartesian coordinates, or by the potential V given by

$$V(r) = g\frac{e^{-\kappa r}}{r^s} \quad (g > 0, \kappa \geqq 0, s > 0).$$

Here, the positions (x_1, x_2, x_3) and the velocities of the mass point are assumed to be bounded in the phase space. We define T as the kinetic energy, and let $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ and the time average $\langle G \rangle$ of a function G is defined by $\langle G \rangle = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(t)dt$. Answer the following questions (i)-(iv).

(i) Show that

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(mr^2) = 2T - nU$$

for a motion affected by the homogeneous potential U.

(ii) Show that

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2}\langle U \rangle$$

for a motion affected by the homogeneous potential U.

(iii) Determine the degree n of a homogeneous potential function U which satisfies the relation $\langle T \rangle = |\langle H \rangle| > 0$, where the Hamiltonian function H is given by the total energy $T + U$ for a motion affected by the homogeneous potential U.

(iv) Show that

$$\frac{2-s}{2}\langle V \rangle - \frac{\kappa}{2}\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle V^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leqq \langle H \rangle \leqq \frac{2-s}{2}\langle V \rangle$$

in the case of the Hamiltonian function $H = T + V$ for a motion affected by the potential V.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

n次ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$および$n$次正方行列$A = (a_{ij})$に対して，実数$||\boldsymbol{x}||_\infty$および$||A||_\infty$をそれぞれ$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$および$||A||_\infty = \max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{||A\boldsymbol{x}||_\infty}{||\boldsymbol{x}||_\infty}$と定義する．ここで，記号$^{\mathrm{T}}$は転置を表す．また，行列$A$の固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$とするとき，$\rho(A) = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i|$とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\rho(A) \leqq ||A||_\infty$が成り立つことを示せ．

(ii) $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$が成り立つことを示せ．

(iii) $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = O$が成り立つためには，$\rho(A) < 1$であることが必要十分であることを示せ．

(iv) $||A||_\infty < 1$ならば$I - A$は正則で

$$(I - A)^{-1} = I + \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} A^i$$

が成り立つことを示せ．ここで，Iは単位行列を表わす．任意のn次ベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$および$n$次正方行列$A, B$に対して，

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_\infty \leqq ||\boldsymbol{x}||_\infty + ||\boldsymbol{y}||_\infty, \qquad ||A + B||_\infty \leqq ||A||_\infty + ||B||_\infty$$

が成立することを用いてよい．

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Let $||\boldsymbol{x}||_\infty$ and $||A||_\infty$ be real values defined by

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|, \qquad ||A||_\infty = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_\infty}{||\boldsymbol{x}||_\infty}$$

for an n-dimensional vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ and an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$, respectively. Here we denote the transposition by ${}^{\mathrm{T}}$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the eigenvalues of the matrix A. Define $\rho(A) = \max_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i|$. Answer the following questions.

(i) Prove that $\rho(A) \leqq ||A||_\infty$.

(ii) Prove that $||A||_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(iii) Prove that $\lim_{k \to \infty} A^k = O$, if and only if $\rho(A) < 1$.

(iv) Prove that, if $||A||_\infty < 1$, then $I - A$ is regular and

$$(I - A)^{-1} = I + \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} A^i$$

holds, where I is the identity matrix. The facts that $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_\infty \leqq ||\boldsymbol{x}||_\infty + ||\boldsymbol{y}||_\infty$ and $||A + B||_\infty \leqq ||A||_\infty + ||B||_\infty$ hold for any n-dimensional vectors $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ and $n \times n$ matrices A, B can be used without proof.

Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成26年度4月期入学)

Admissions for April 2014

Entrance Examination for Master's Program

Department of Applied Mathematics and Physics

Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成25年8月5日(月) 15:30 – 17:30

August 5, 2013, 15:30 – 17:30

専門科目
Major Subjects

選択科目（Choice of Subjects）:

応用数学、グラフ理論、オペレーションズ・リサーチ、現代制御論、物理統計学、力学系数学

Applied Mathematics, Graph Theory, Operations Research, Modern Control Theory, Physical Statistics, Mathematics for Dynamical Systems

注意 (NOTES)

1. 上記科目から２科目選択すること。
   ３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

応用数学

$\boxed{1}$

2 変数関数 $\phi(u,\theta)$ に対する積分変換 $\mathcal{F}_u$ および 2 変数関数 $\psi(x,y)$ に対する積分変換 $\mathcal{G}_{x,y}$ をそれぞれ

$$\mathcal{F}_u[\phi](r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u,\theta) e^{-iur} du,$$

$$\mathcal{G}_{x,y}[\psi](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y) e^{-i(x\xi+y\eta)} dxdy$$

によって定める．以下では，

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{x,y}[f](\xi,\eta) e^{i(x\xi+y\eta)} d\xi\, d\eta \tag{1}$$

をみたす 2 変数実関数 $f(x,y)$ について考える．このとき，

$$R_f(u,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) dv$$

とする．以下の問いに答えよ．

(i) 式 (1) を，極座標変換 (r,θ), $\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて表せ．

(ii) $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) = \sqrt{2\pi}\mathcal{G}_{x,y}[f](r\cos\theta, r\sin\theta)$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta+\pi) = \mathcal{F}_u[R_f](-r,\theta)$ が成り立つことを示せ．

(iv) 次式が成り立つことを示せ．

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) e^{ir(x\cos\theta + y\sin\theta)} |r| dr \right) d\theta$$

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let $\mathcal{F}_u$ be the integral transformation for a bivariate function $\phi(u,\theta)$, defined by

$$\mathcal{F}_u[\phi](r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u,\theta)e^{-iur}du,$$

and $\mathcal{G}_{x,y}$ be the one for a bivariate function $\psi(x,y)$, defined by

$$\mathcal{G}_{x,y}[\psi](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y)e^{-i(x\xi+y\eta)}dxdy.$$

Consider the bivariate real-valued function $f(x,y)$ such that

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{x,y}[f](\xi,\eta)e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi\, d\eta. \tag{1}$$

Set

$$R_f(u,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)dv.$$

Answer the following questions.

(i) Rewrite eq.(1) using the polar coordinates

$$\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta\ (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi).$$

(ii) Prove that $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta) = \sqrt{2\pi}\mathcal{G}_{x,y}[f](r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(iii) Prove that $\mathcal{F}_u[R_f](r,\theta+\pi) = \mathcal{F}_u[R_f](-r,\theta)$.

(iv) Prove that $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_u[R_f](r,\theta)e^{ir(x\cos\theta+y\sin\theta)}|r|dr\right)d\theta$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

枝に重みをもつ連結無向グラフ G を考える．以下の問いに答えよ．

(i) G の最小全域木を求めるクラスカル法を述べよ．

(ii) クラスカル法が正しく最小全域木を出力することの証明を与えよ．

(iii) G の枝の重みがすべて異なるとき，G の最小全域木は唯一であることを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let G be a connected undirected graph with edges weighted by reals. Answer the following questions.

(i) Describe Kruskal's method for finding a minimum spanning tree of G.

(ii) Prove that Kruskal's method correctly constructs a minimum spanning tree of G.

(iii) Prove that a minimum spanning tree of G is unique when all edge weights are distinct.

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

集合 I を $I = \{1, \ldots, m\}$ とし，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top M \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x}$$

ただし，M は $n \times n$ 対称行列，$\boldsymbol{q}$ は n 次元ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．

次の非線形計画問題（P）を考える．

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x} \leqq b_i \ \ (i \in I) \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{a}^i$ $(i \in I)$ は n 次元定数ベクトルであり，b_i $(i \in I)$ は定数である．

問題（P）に対して，次のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) をみたすベクトル $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$ が存在すると仮定する．

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq b_i, \ \lambda_i^* \geqq 0, \ ((\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* - b_i)\lambda_i^* = 0 \ \ (i \in I) \end{cases}$$

さらに，$J = \{i \in I \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* = b_i\}$, $C = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} \leqq 0 \ (i \in J)\}$, $C^0 = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} = 0 \ (i \in J)\}$ とする．

以下の問 (i)-(v) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{d}$ となることを示せ．

(ii) 任意の $\boldsymbol{d} \in C$ に対して，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{d} \geqq 0$ となることを示せ．

(iii) 問題 (P) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \in C$ となることを示せ．

(iv) 任意の $\boldsymbol{d} \in C$ に対して，$\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} \geqq 0$ が成り立つとする．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の大域的最適解となることを示せ．

(v) $\boldsymbol{x}^*$ が問題 (P) の局所的最適解であれば，任意の $\boldsymbol{d} \in C^0$ に対して，$\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $I = \{1, \ldots, m\}$, and let a function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top M \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x},$$

where M is an $n \times n$ symmetric matrix, $\boldsymbol{q}$ is an n dimensional vector, and the superscript $^\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problem (P):

$$\text{(P)}: \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x} \leqq b_i \ \ (i \in I), \end{array}$$

where $\boldsymbol{a}^i$ $(i \in I)$ are n-dimensional vectors and b_i $(i \in I)$ are constants.

Suppose that there exist vectors $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$ satisfying the following Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem (P):

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq b_i, \ \lambda_i^* \geqq 0, \ ((\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* - b_i)\lambda_i^* = 0 \ \ (i \in I). \end{cases}$$

Let $J = \{i \in I \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* = b_i\}$, $C = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} \leqq 0 \ (i \in J)\}$ and $C^0 = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} = 0 \ (i \in J)\}$.

Answer the following questions (i)-(v).

(i) Show that $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{d}$ for all $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Show that $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C$.

(iii) Show that $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \in C$ for any feasible solution $\boldsymbol{x}$ of problem (P).

(iv) Suppose that $\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C$. Show that $\boldsymbol{x}^*$ is a global optimal solution to problem (P).

(v) Suppose that $\boldsymbol{x}^*$ is a local optimal solution to problem (P). Show that $\boldsymbol{d}^\top M \boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C^0$.

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

で表される線形システムを考える．ただし x は状態，u は制御入力である．行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ であるとする．また状態フィードバックゲインを $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ として $A_K = A+BK$ とおく．部分空間 S を $S = \mathrm{span}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ と定める．ただし span は括弧内のベクトルで張られる部分空間を表す．以下の問いに答えよ．

(i) 部分空間 S は $x \in S$ ならば $Ax \in S$ を満たすことを示せ．

(ii) 部分空間 $S_K = \mathrm{span}\{B, A_K B, \ldots, (A_K)^{n-1}B\}$ とすれば $S = S_K$ であることを示せ．

(iii) 部分空間 S から S への線形写像 $\bar{A}_K$ を $\bar{A}_K x = A_K x$, $x \in S$ として定める．特に $K = 0$ のとき，$\bar{A}_0 = \bar{A}$ と書く．$\dim S < n$ のときには $KA^iB = 0$, $i = 0, 1, \ldots, \dim S - 1$ を満たす K に関して，$\bar{A}_K = \bar{A}$ であることを示せ．

(iv) ここでは $n = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -8 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$$

とする．$\dim S = 2$ であることを示し，$\{B, AB\}$ を S の基底とするときの $\bar{A}_K$ の行列表示を求めよ．その特性方程式を $(s+4)^2$ に設定する状態フィードバックゲイン K をすべて求めよ．

An English translation:

Modern Control Theory

4

A linear dynamical system is described by the state equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

where x is the state, u is the input, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Define $A_K = A+BK$ for the state feedback gain $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Define the subspace $S = \text{span}\,\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$, where span denotes the subspace spanned by the vectors in the brace. Answer the following questions.

(i) Prove that $Ax \in S$ if $x \in S$.

(ii) Define $S_K = \text{span}\,\{B, A_K B, \ldots, (A_K)^{n-1}B\}$. Show that $S = S_K$.

(iii) Let the linear map $\bar{A}_K : S \to S$ be defined by $\bar{A}_K x = A_K x$ for $x \in S$. Denote $\bar{A}_0 = \bar{A}$ when $K = 0$. Prove that $\bar{A}_K = \bar{A}$ holds for K satisfying $KA^iB = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, \dim S - 1$ when $\dim S < n$.

(iv) Let $n = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -8 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}.$$

Show that $\dim S = 2$. Calculate the matrix representation of $\bar{A}_K$ when the basis of S is given by $\{B, AB\}$. Obtain all the feedback gain K for which the characteristic equation of $\bar{A}_K$ is $(s+4)^2$.

物理統計学

$\boxed{5}$

1次元ランダムウォークを考える．ランダムウォーカーは1直線上に等間隔に並んだ点 $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ のどこかにいるものとする．ここで，$x_k = ak \ \ (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ で a は正の定数．ウォーカーは初期には x_0 におり，時間 τ ごとに右か左の最近接点に，それぞれ確率 p，$q = 1 - p$ でジャンプすることを繰りかえす．ここで，$0 < p < 1$ である．すなわち，時刻 $t = n\tau \ (n = 1, 2, \ldots)$ にウォーカーはジャンプする．$P_n(k)$ を n 回のジャンプの後ウォーカーが x_k にいる確率とする．以下の問いに答えよ．

(i) $P_n(k)$ を求めよ．

(ii) $P_n(k)$ の n に関する漸化式を求めよ．

(iii) $f(x,t) := \dfrac{1}{2a} P_{\frac{t}{\tau}}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ とし，$f(x,t)$ は t に関して連続的に微分可能で x に関して連続的に2階微分可能であると仮定する．$f(x,t)$ に対する偏微分方程式を，問 (ii) で求めた $P_n(k)$ の漸化式から，$\dfrac{a^2}{2\tau} = D$，$\dfrac{(p-q)a}{\tau} = v$ という条件のもとで，$a \to 0$，$\tau \to 0$ の極限をとって導出せよ．ここで，v は定数で，D は正の定数である．

(iv) ウォーカーの時刻 t での位置の平均 $X(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ x f(x,t)$ と位置の分散 $\sigma^2(t) := -(X(t))^2 + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ x^2 f(x,t)$ を計算せよ．ここで，$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} x^2 f(x,t) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0$，$X(0) = \sigma^2(0) = 0$ および $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ f(x,t) = 1$ を用いてよい．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let us consider the one-dimensional random walk. A random walker can be at regularly spaced positions $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ along a line, where $x_k = ak$ with $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ and a is a positive constant. The walker is at x_0 initially, and sequentially jumps to the nearest right or left position with probability p or $q = 1-p$, respectively, where $0 < p < 1$. Every time interval between the successive jumps equals τ, *i.e.* the walker jumps at time $t = n\tau$ $(n = 1, 2, \ldots)$. $P_n(k)$ denotes the probability that the walker is at x_k after n jumps. Answer the following questions.

(i) Obtain $P_n(k)$.

(ii) Obtain the recurrence formula of $P_n(k)$ for n.

(iii) Let $f(x,t) := \dfrac{1}{2a} P_{\frac{t}{\tau}}\left(\dfrac{x}{a}\right)$. $f(x,t)$ is assumed to be continuously differentiable with respect to t and twice continuously differentiable with respect to x. Derive the partial differential equation for $f(x,t)$ from the recurrence formula of $P_n(k)$ obtained in the question (ii) under the limit, $a \to 0$ and $\tau \to 0$ with $\dfrac{a^2}{2\tau} = D$ and $\dfrac{(p-q)a}{\tau} = v$, where v is a constant and D is a positive constant.

(iv) Calculate the average position $X(t)$ of the walker at time t, $X(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x f(x,t)$ and the variance $\sigma^2(t)$ of the position at t, $\sigma^2(t) := -(X(t))^2 + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 f(x,t)$ with the use of $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0$, $X(0) = \sigma^2(0) = 0$ and $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x,t) = 1$.

力学系数学

$\boxed{6}$

微分方程式系 $\dfrac{dx}{dt} = f(x, y)$, $\dfrac{dy}{dt} = g(x, y)$, ただし, $x = x(t)$, $y = y(t)$, に対して $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ がその定数解となるとき，xy-平面上の点 (x_0, y_0) をこの微分方程式系の不動点という．以下の問いに答えよ．

(i) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x^3 - x \tag{1}$$

の不動点を全て求めよ．

(ii) (i) で求めた不動点の近傍における (1) の解の挙動を調べて，不動点が沈点，源点，渦心点，鞍点，その他のいずれであるか，理由を添えて答えよ．

(iii) $x = x(t)$, $y = y(t)$ が微分方程式 (1) の解であるとき，関数

$$H(x, y) = 2y^2 - (x^2 - 1)^2$$

は t によらない定数であることを示せ．さらに，(ii) および $H(x, y)$ を用いて，xy-平面における (1) の解曲線 $(x(t), y(t))$ のグラフをえがけ．

(iv) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y - x, \qquad \frac{dy}{dt} = x^3 - x \tag{2}$$

の不動点を全て求めよ．

(v) (iv) で求めた不動点の近傍における (2) の解の挙動を調べて，不動点が沈点，源点，渦心点，鞍点，その他のいずれであるか，理由を添えて答えよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

For the system of differential equations $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$ and $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$ with $x = x(t)$ and $y = y(t)$, if $x(t) \equiv x_0$ and $y(t) \equiv y_0$ give a constant solution, then the point (x_0, y_0) on the xy-plane is called a fixed point of the system of differential equations. Answer the following questions.

(i) Find all of the fixed points of the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x^3 - x. \tag{1}$$

(ii) Investigate the local behavior of solutions of (1) in the neighborhood of each fixed point found in the question (i) to classify these fixed points into sink, source, center, saddle point or others, giving reason for the answer.

(iii) Show that the function

$$H(x, y) = 2y^2 - (x^2 - 1)^2$$

is independent from t for any solution $x = x(t)$ and $y = y(t)$ of (1). Next, graph trajectories $(x(t), y(t))$ of solutions of (1) on the xy-plane using (ii) and $H(x, y)$.

(iv) Find all of the fixed points of the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = y - x, \qquad \frac{dy}{dt} = x^3 - x. \tag{2}$$

(v) Investigate the local behavior of solutions of (2) in the neighborhood of each fixed point found in (iv) to classify these fixed points into sink, source, center, saddle point or others, giving reason for the answer.