グラフ理論

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，各枝 $e \in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与える．枝の部分集合 $F \subseteq E$ は，グラフ $(V, E - F)$ が非連結であり，この性質の下で極小であるとき G のカットセットと呼ばれる．以下の (i)-(iv) の各命題について，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．

(i) K を G の一つのカットセットとし，a を K の中で枝重みが最小である枝とする．このとき, G の任意の最小木は枝 a を含む.

(ii) K を G の一つのカットセットとし，a を K の中で枝重みが最小である枝とする．このとき, G には枝 a を含む最小木が存在する.

(iii) K を G の一つのカットセットとし，b を K の中で枝重みが最大である枝とする．このとき，G には枝 b を含まない最小木が存在する.

(iv) C を G の一つの閉路とし，a を C の中で枝重みが最小である枝とする．このとき，G には枝 a を含む最小木が存在する.

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple undirected graph with a vertex set V and an edge set E, and let each edge $e \in E$ be weighted by a real number $w(e)$. A cut-set of G is a minimal subset F of E such that $(V, E - F)$ is disconnected. Prove or disprove each of the following propositions in (i)-(iv), giving a proof or a counterexample.

(i) Let K be a cut-set in G, and let a be an edge in K which has the minimum weight. Then any minimum spanning tree of G contains edge a.

(ii) Let K be a cut-set in G, and let a be an edge in K which has the minimum weight. Then G has a minimum spanning tree which contains edge a.

(iii) Let K be a cut-set in G, and let b be an edge in K which has the maximum weight. Then G has a minimum spanning tree which does not contain edge b.

(iv) Let C be a cycle in G, and let a be an edge in C which has the minimum weight. Then G has a minimum spanning tree which contains edge a.