現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態ベクトル，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態とする．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とし，$^\top$ は転置をあらわす．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) A のすべての実固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(ii) このシステムの可制御性を判定せよ．

(iii) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ とする．このとき，$x(\tau) = -2x_0$ を満たす $\tau > 0$ および $u(t)$ が存在するか判定せよ．

(iv) 状態フィードバック $u(t) = k^\top x(t)$ がシステムを内部安定化するような $k \in \mathbb{R}^3$ が存在するか判定せよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

and $^\top$ denotes the transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Find all the real eigenvalues of A and their corresponding eigenvectors.

(ii) Determine the controllability of the system.

(iii) Let $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Then, determine whether there exist $\tau > 0$ and $u(t)$ for which $x(\tau) = -2x_0$ holds.

(iv) Determine whether there exists $k \in \mathbb{R}^3$ such that the state feedback control $u(t) = k^\top x(t)$ internally stabilizes the system.