アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を $n \geqq 2$ 個の節点の集合 V，枝集合 E から成る連結単純無向グラフとし，$T=(V,F)$ を節点 $s \in V$ を根とする G の全域木，$\ell : V \to \{1,2,\ldots,n\}$ を節点の番号付けとし，以下の条件 (a), (b) が成り立っていると仮定する．

(a) 各枝 $uv \in E$ に対し，節点 u は，節点 v の T における先祖，あるいは子孫である，

(b) 各節点 $v \in V \setminus \{s\}$ と T における v の親 u に対し，$\ell(u) < \ell(v)$.

L を T の葉節点の集合とし，各節点 $v \in V$ に対し，$N(v)$ を v の G における隣接点の集合，$D(v)$ を v および v の T における子孫から成る集合と定める．関数 $\mathrm{lowpt} : V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1,2,\ldots,n\}$ を

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \quad v \in V \setminus (L \cup \{s\})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) どの葉節点 $u \in L$ も G の関節点ではないことを証明せよ．

(ii) 根 s が G の関節点である必要十分条件は，T における s の子が 2 個以上であることを証明せよ．

(iii) 節点 $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ が G の関節点である必要十分条件は，u が $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$ を満たす子 v を持つことであることを証明せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

2

Let $G = (V, E)$ be a connected simple undirected graph with a set V of $n \geqq 2$ vertices and a set E of edges, let $T = (V, F)$ be a spanning tree of G rooted at a vertex $s \in V$, and let $\ell : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ be a numbering on V, where we assume that the following conditions (a) and (b) hold.

(a) For each edge $uv \in E$, vertex u is either an ancestor or a descendant of v in T,

(b) For each vertex $v \in V \setminus \{s\}$ and the parent u of v in T, $\ell(u) < \ell(v)$.

Let L denote the set of leaves in T. For each vertex $v \in V$, let $N(v)$ denote the set of neighbors of v in G, and let $D(v)$ denote the set consisting of vertex v and the descendants of v in T. Define a function lowpt : $V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ such that

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \qquad v \in V \setminus (L \cup \{s\}).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that no leaf $u \in L$ is a cut-vertex in G.

(ii) Prove that a necessary and sufficient condition for the root s to be a cut-vertex in G is that s has at least two children in T.

(iii) Prove that a necessary and sufficient condition for a vertex $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ to be a cut-vertex in G is that u has a child v in T such that $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$.