基礎数学 II

$\boxed{6}$

$n \times n$ 行列 A を用い，線形写像 f を

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

によって定める．このとき，f の核を

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$$

で表し，ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ の非ゼロ要素数を

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j)$$

によって定める．ただし，記号 $^\top$ は転置を表し，$\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$ とする．

d を n 以下の正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ の次元が

$$\dim V = n - \dim N$$

で与えられることを示せ．

(ii) 行列 A の適当な $d-1$ 個の列ベクトルの組が線形従属ならば，$\sigma(\boldsymbol{x}) < d$ を満たす非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ が存在することを示せ．

(iii) 任意の非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ に対して $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ が成り立つための必要十分条件は，行列 A の任意の $d-1$ 個の列ベクトルの組が常に一次独立であることを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let f be a linear mapping defined by

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

with an $n \times n$ matrix A. The kernel of f is defined by

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\},$$

and the number of non-zero elements of a vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ by

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j),$$

where $^\top$ denotes the transposition and $\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$. Let d be a positive integer less than or equal to n. Answer the following questions.

(i) Show that the dimension of the subspace $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ of $\mathbb{R}^n$ is given by

$$\dim V = n - \dim N.$$

(ii) Show that if some $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly dependent, then there exists a non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ such that $\sigma(\boldsymbol{x}) < d$.

(iii) Show that $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ for any non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ if and only if any $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly independent.