物理統計学

$\boxed{5}$

X を尺度母数 $\gamma(>0)$ のコーシー分布に従う無限区間 $(-\infty, \infty)$ 上の実数値確率変数とし，その確率密度関数は $\rho_\gamma(X) = \dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$ で与えられるものとする．$X \neq 0$ で変換 $F(X)$ を $F(X) = \alpha X - \dfrac{\beta}{X}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(i) 変換 $Y = \alpha \dfrac{1}{X}, \alpha > 0$ で定義される確率変数 Y は，尺度母数 $\gamma' = \alpha \dfrac{1}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma'}(Y)$ に従うことを示せ．

(ii) 変換 $Z = F(X)$ で定義される確率変数 Z は，尺度母数 $\gamma'' = \alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma''}(Z)$ に従うことを示せ．

(iii) $p(X|Z) = \dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$ と定義する時，関係式

$$\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) = 1,$$

$$0 \leqq p(X|Z) \leqq 1 \quad \text{for} \quad X \in F^{-1}(\{Z\}).$$

を満足することを示せ．

(iv) $\gamma = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$ である時，エントロピー $S(Z) = -\displaystyle\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) \ln p(X|Z)$ の平均 $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ が，次式

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|\frac{dF(X)}{dX}\right| \rho_\gamma(X)dX$$

を満足することを示せ．但し，変換 $F(X)$ があるコーシー分布の不変測度に関してエルゴード性を持つことは既知として良い．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let X be a real-valued random variable over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ obeying the Cauchy distribution with a scale parameter $\gamma(>0)$ whose density function is given by $\rho_\gamma(X) = \dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$. Define $F(X) = \alpha X - \dfrac{\beta}{X}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ for $X \neq 0$. Answer the following questions.

(i) Show that a random variable Y given by the transformation $Y = \alpha \dfrac{1}{X}, \alpha > 0$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma'}(Y)$ with the scale parameter $\gamma' = \alpha \dfrac{1}{\gamma}$.

(ii) Show that a random variable Z given by the transformation $Z = F(X)$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma''}(Z)$ with the scale parameter $\gamma'' = \alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$.

(iii) Define $p(X|Z) = \dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$. Show that $p(X|Z)$ satisfies the relations

$$\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) = 1,$$

$$0 \leqq p(X|Z) \leqq 1 \quad \text{for} \quad X \in F^{-1}(\{Z\}).$$

(iv) Show that when $\gamma = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$, the average of entropy given by $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ where $S(Z) = -\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)\ln p(X|Z)$ satisfies the relation

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|\frac{dF(X)}{dX}\right| \rho_\gamma(X)dX.$$

Here, one can use the fact that the transformation $F(X)$ is ergodic with respect to a certain invariant measure given by a Cauchy distribution.