基礎数学 I

1

n を正の整数とする．実数 $\beta_{k,n}$ および n 次多項式

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

を用いて，高々 n 次の多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 次の恒等式が成り立つことを示せ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x)$

(ii) $\delta > 0$ および $x \in (0,1)$ に対して，

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

が成り立つことを示せ．ここで和の記号は，$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$ を満たす全ての k に対する和を表す．

(iii) f を区間 $(0,1)$ 上の連続な実数値有界関数とし，$\beta_{k,n} = f(k/n)$ によって多項式列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正の整数 N で

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0,1))$$

を満たすものが存在することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Let n be a positive integer. We introduce a polynomial of degree at most n by

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x),$$

where $\beta_{k,n} \in \mathbb{R}$ and the polynomial of degree n,

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k},$$

for $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Answer the following questions.

(i) Prove the following identities:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx,$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x).$

(ii) Show that

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

for $\delta > 0$ and $x \in (0,1)$, where the summation symbol denotes the sum over k satisfying $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$.

(iii) Let f be a continuous real-valued bounded function on the interval $(0,1)$. By $\beta_{k,n} = f(k/n)$, we define the polynomial sequence $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Show that for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer N such that

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0,1)).$$