線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1,\ldots,n)$ と $\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトル，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ を n 次元ベクトルする．ただし $^\top$ は転置記号を表す．さらに，$\boldsymbol{A}$ を第 i 列が $\boldsymbol{a}^i$ となる $m \times n$ 行列，つまり $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$ とする．

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，(D) の決定変数は $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ である．

問題 (P) は $x_1^* = 0$ となる唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top$ を持つとする．このとき，次の線形計画問題 (Q) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*) v \\
 & \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\
 & & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \ldots, n) \\
 & & v \geqq 0
\end{array}
$$

ただし，決定変数は $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ と $v \in \mathbb{R}$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (Q) の双対問題を書け．

(ii) 問題 (Q) が最適解を持つことを示せ．

(iii) 問題 (Q) の最適値が 0 となることを示せ．

(iv) 問題 (Q) は $v^* > 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．$\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$ とする．このとき，$\boldsymbol{w}^*$ は双対問題 (D) の最適解であることを示せ．

(v) 問題 (Q) は $v^* = 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．このとき，$(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$ となる (D) の最適解 $\boldsymbol{w}^*$ が存在することを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \dots, n)$ and $\boldsymbol{b}$ be m-dimensional vectors, and let $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ be an n-dimensional vector, where the superscript $^\top$ denotes transposition. Moreover, let $\boldsymbol{A}$ be an $m \times n$ matrix whose ith column is $\boldsymbol{a}^i$, that is, $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$.

Consider the following linear programming problem (P) and its dual problem (D):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c},
\end{array}
$$

where the decision variables of (P) and (D) are $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, respectively.

Suppose that problem (P) has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ such that $x_1^* = 0$. Then consider the following linear programming problem (Q):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*)v \\
 & \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\
 & & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \dots, n) \\
 & & v \geqq 0,
\end{array}
$$

where the decision variables are $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $v \in \mathbb{R}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem (Q).

(ii) Show that problem (Q) has an optimal solution.

(iii) Show that an optimal value of problem (Q) is 0.

(iv) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* > 0$. Let $\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$. Then show that $\boldsymbol{w}^*$ is an optimal solution to problem (D).

(v) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* = 0$. Then show that problem (D) has an optimal solution $\boldsymbol{w}^*$ such that $(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$.