

基礎数学 II

6

以下の問いに答えよ.

(i) 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

のランク (階数) r を求め, $\text{rank } B = r$ なる適当な $4 \times r$ 行列 B , $\text{rank } C = r$ なる $r \times 4$ 行列 C への分解 $A = BC$ を計算せよ.

(ii) n 本の m 次元列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ からなる $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

のランク r は $r < \min\{m, n\}$ であるものとする. このとき, 行列 A は, $\text{rank } B = r$ なる適当な $m \times r$ 行列 B , $\text{rank } C = r$ なる $r \times n$ 行列 C を用いて

$$A = BC$$

と分解されることを示せ.

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Answer the following questions.

- (i) Find the rank r of the 4×4 matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

and a decomposition of A into a product $A = BC$, where B is a suitable $4 \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times 4$ matrix of rank r .

- (ii) Let $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ be n column vectors of dimension m and let the $m \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

be of rank r with $r < \min\{m, n\}$. Show that the matrix A can be decomposed into a product

$$A = BC,$$

where B is a suitable $m \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times n$ matrix of rank r .