応用数学

1

i を虚数単位とする．$f(z)$ を，K 個の整数ではない複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ を除いて正則な複素関数とする．$k = 1, \ldots, K$ に対して，a_k は $f(z)$ の一位の極で，その留数を A_k とし，$\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$ とする．$N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$ を満たす自然数 N に対し，Γ_N を $N + \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} - Ni, N + \frac{1}{2} - Ni$ をこの順に結んでできる長方形の経路とする．以下の問いに答えよ．

(i) N によらない実数 M が存在して，Γ_N 上の z に対して，

$$|\cot \pi z| < M$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$ である．

(ii) 次式を示せ．

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) 次式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) c を 0 でない実数とする．次式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let i be the imaginary unit. Let $f(z)$ be a complex function which is holomorphic except at K non-integer, complex numbers $a_1, a_2, \ldots, a_K$. Assume that a_k is a pole of order one and the residue of $f(z)$ at a_k is A_k for $k = 1, \ldots, K$. Assume that $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$. For a positive integer N satisfying $N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$, let Γ_N be the rectangular path connecting $N + \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} - Ni$ and $N + \frac{1}{2} - Ni$ in this order. Answer the following questions.

(i) Show that there is a real number M independent of N such that

$$|\cot \pi z| < M$$

holds for any z on Γ_N. Here $\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$.

(ii) Show that

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) Show that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) Let c be a non-zero real number. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$