物理統計学

$\boxed{5}$

時系列 $X_0, X_1, \ldots$ は区間 $(-1,1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度とするエルゴード的な力学系 $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ により決定されるものとする．さらに

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の観測関数 $B(x)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

が成立するものとする．但し, $X_i \in (-1,1) \quad (i \geqq 0)$ である．$\langle B \rangle$ は初期値 $X_0 = \cos(\theta_0)$ が不変測度 $\mu(dx)$ に従って分布する時の積分 $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ と定義する．以下の問いに答えよ.

(i) $B(x) = x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(ii) $B(x) = 2x^2 - 1$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(iii) $B(x) = (2x^2 - 1)x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ であることを示せ.

(iv) X_n の一般解を与えよ.

(v) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ の時, $\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ.

(vi) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ に対して, 1 次元ランダムウォークを

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

で構成した時, その拡散係数 $D \equiv \lim_{N\to\infty} \dfrac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$ を求めよ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let a time series $X_0, X_1, \dots$ be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ with a probability measure $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1,1)$ being the invariant measure and assume that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty,$$

where $X_i \in (-1,1) \quad (i \geqq 0)$. $\langle B \rangle$ is defined as the integral $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ with an initial condition $X_0 = \cos(\theta_0)$ being distributed according to the invariant measure $\mu(dx)$. Answer the following questions:

(i) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = x$.

(ii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = 2x^2 - 1$.

(iii) Show that $\langle B \rangle = 0$ for $B(x) = (2x^2 - 1)x$.

(iv) Give a general solution X_n.

(v) Show that $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$.

(vi) Let us construct a one-dimensional random walk defined by

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \dots$$

for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$. Obtain the diffusion coefficient $D \equiv \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$.